Ontwikkeling in verandering

Roorda, Gerrit

Publication date:
2012

Ontwikkeling in verandering

Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide

Gerrit Roorda

Roorda, Gerrit
Development of 'change'. The development of students' mathematical proficiency with respect to the concept of derivative.

ISBN: 978-94-6191-143-8
NUR: 846

Print: Ipskamp Drukkers B.V., Enschede, Nederland

RIJKSUNIVERSITEIT GRONINGEN

Ontwikkeling in verandering

Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide

Proefschrift

ter verkrijging van het doctoraat in de
Wiskunde en Natuurwetenschappen
aan de Rijksuniversiteit Groningen
op gezag van de
Rector Magnificus, dr. E. Sterken,
in het openbaar te verdedigen op
vrijdag 9 maart 2012
om 14.30 uur

door

Gerrit Roorda
geboren op 25 augustus 1967
te Groningen

Promotores:	Prof. dr. M.J. Goedhart Prof. dr. A. van Streun
Copromotor:	Dr. F.P. Vos
Beoordelingscommissie:	Prof. dr. H.W. Broer Prof. dr. W. van Dooren Prof. dr. J.A. van Maanen

Inhoud

Hoofdstuk 1 Inleiding en probleemstelling

1.1 Aanleiding

Als leerling, wiskundedocent en lerarenopleider heb ik ervaren dat leerlingen bij wiskunde verworven kennis en vaardigheden moeilijk kunnen toepassen in andere schoolvakken. Hoewel bijvoorbeeld het differentiëren van functies bij wiskunde wel behandeld was, zagen maar weinig medeleerlingen in mijn vwo 4- en 5-klas dat de formule in het natuurkundeboek (Middelink, 1977) voor de snelheid van een vallend voorwerp ($v_t = v_0 + gt$) de afgeleide is van de formule voor de verplaatsing ($x_t = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$).

De conferentiebundel van de in 1975 gehouden Natuurkunde Wiskunde Conferentie (NWC, 1975) bevestigt deze ervaring. Doel van genoemde conferentie was wiskunde- en natuurkundeleraren tot samenwerken te stimuleren om er zo voor te zorgen dat bij leerlingen "*geen aparte geheugencellen gevuld moeten worden met gelijke of zeer goed vergelijkbare begrippen*" (NWC, 1975, p.A1). Het voorwoord van deze conferentiebundel noemt twee redenen voor het organiseren van de conferentie. Als eerste wordt genoemd dat al vóór de invoering van de Mammoetwet in 1968 "*er aansluitingsproblemen bestonden betreffende wiskundekennis, nodig voor het volgen van de natuurkundelessen. Vooral de differentiaalrekening gaf nogal eens aanleiding tot strubbelingen*" (p.A1). En als tweede reden: "*Bij de natuurkundeles weten de leerlingen weinig meer van de kennis opgedaan bij wiskunde en omgekeerd. In de ene les wordt uitgebreid gewerkt met functies en hun grafieken ($f: x \to ax^2 + bx + c$ of $y = ax + b$ enz.). In de andere les spreekt men van 'de druk is nu een functie van het volume' of 'zet p eens uit tegen 1/v'. Zien alle leerlingen meteen een verband tussen beide formuleringen?*" (p.A1).
De eerste reden betreft vooral de volgtijdelijkheid van leerstof. Als bij wiskunde de differentiaalrekening nog niet is geïntroduceerd kan de natuurkundedocent hier niet naar verwijzen bij het onderwerp kinematica. De tweede reden betreft het probleem dat sommige leerlingen verbanden tussen leerstof uit de twee schoolvakken niet zien.

Dertig jaar later bracht de Werkgroep Afstemming Wiskunde - Natuurkunde (Van de Giessen, Hengeveld, Van der Kooij, Rijke & Sonneveld, 2007) in opdracht van de curriculumvernieuwingscommissies van wiskunde en natuurkunde een advies uit over de afstemming tussen de schoolvakken wiskunde en natuurkunde. In het eindverslag van de werkgroep blijkt dat het toepassen van kennis uit wiskunde in natuurkunde of andersom nog steeds problematisch is. De genoemde conferentiebundel (NWC, 1975) wordt met

instemming aangehaald. De werkgroep geeft adviezen betreffende een zestal thema's waarbij afstemming tussen wiskunde en natuurkunde plaats kan vinden, zoals evenredigheden, vectoren en differentiëren.
Soortgelijke problemen worden ook gerapporteerd bij het toepassen van wiskundige kennis en vaardigheden in het schoolvak economie (Heertje, 1971; Kneppers, 2010; Mantel & Klerks, 2003; Ten Hove, 1984). Mantel en Klerks (2003) beschrijven hun ervaringen in klas vwo 6 waar een deel van de leerlingen bij de uitleg van het Keynesiaanse model de meest elementaire wiskundige basisbegrippen niet herkent. Kneppers (2010) beschrijft dat leerlingen procentberekeningen met verhoudingstabellen, die ze geleerd hebben in de wiskundeles, niet herkennen in economische opdrachten.

In mijn onderzoek beperk ik me tot het concept 'afgeleide' in het vwo. Onder het concept 'afgeleide' versta ik een geheel van aan elkaar gerelateerde representaties, aspecten en procedures die in verband staan met afgeleide functies (zie hoofdstuk 3). Dit concept wordt bij wiskunde onderwezen in de klassen 4, 5 en 6 van het vwo en wordt gebruikt in de schoolvakken natuurkunde en economie. Vanaf de invoering van de differentiaalrekening in het leerplan van hbs en gymnasium (Smid, 2000) is over dit onderwerp gezegd dat leerlingen kennis die onderwezen is bij wiskunde moeilijk kunnen toepassen bij natuurkunde (Biezeveld, 1979; NWC, 1975; Vredenduin, 1979; Van de Giessen e.a., 2007; Zegers e.a., 2003). Dit wordt in deze publicaties vaak aangeduid met de opmerking dat er bij leerlingen geen transfer optreedt.
Wel lijken sommige leerlingen in de loop van hun schoolloopbaan meer relaties te leggen tussen differentiaalrekening en kinematica, maar onderzoek naar het verloop van dit proces is schaars. Met mijn onderzoek wil ik een bijdrage leveren aan kennis over hoe leerlingen hun kennis en vaardigheden ontwikkelen met betrekking tot het concept afgeleide in de vakken wiskunde, natuurkunde en economie. Deze kennis en vaardigheden worden in dit proefschrift aangeduid als 'wiskundige bekwaamheid'. In hoofdstuk 2 wordt toegelicht wat hieronder wordt verstaan.

1.2 Context

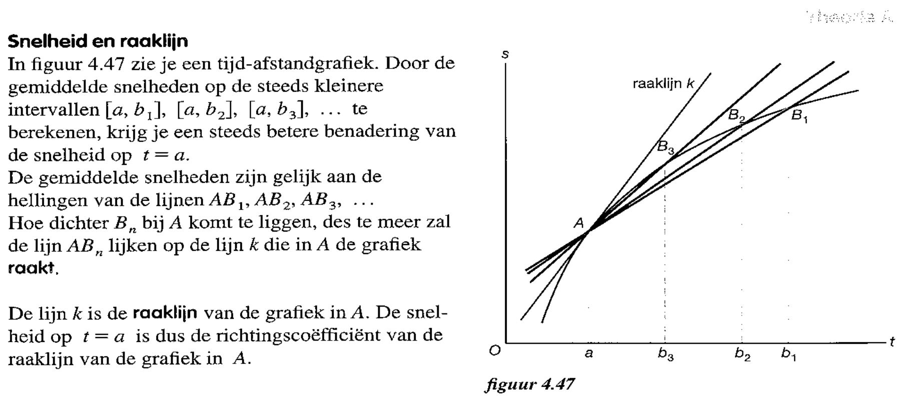
Dit onderzoek heeft plaatsgevonden in de tweede fase, de bovenbouw van het havo en het vwo. Een doelstelling van de tweede fase was onder andere het vergroten van de samenhang tussen schoolvakken (Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs, 1996; Tweede Fase Adviespunt – ministerie van OCW, 2005). De samenhang werd onder andere vormgegeven door de invoering van vier profielen, vier richtingen waarin de leerling zich kan specialiseren. Vanaf klas 4 kiezen leerlingen tussen de profielen Cultuur & Maatschappij, Economie & Maatschappij, Natuur & Gezondheid, Natuur & Techniek.

Ten tijde van dit onderzoek (2006 - 2007) bevatte het profiel Natuur en Gezondheid de profielvakken wiskunde-B1, natuurkunde-1, scheikunde-1 en biologie. Het profiel Natuur en Techniek bevatte de profielvakken wiskunde-B12, natuurkunde-12 en scheikunde-12. Deze laatstgenoemde vakken waren een uitbreiding van de vakken uit het profiel Natuur en Gezondheid. Leerlingen vulden hun vakkenlijst aan met minstens één extra vrij te kiezen vak. Voor de leerlingen in de natuurprofielen kon dit bijvoorbeeld het vak economie zijn. Het vak economie was samen met onder andere wiskunde-A12 onderdeel van het profiel Economie en Maatschappij. In de inhoudelijk samenhangende profielen was de gedachte dat kennis opgedaan in het ene vak toegepast kan worden in een ander vak, zeker als het 'aangrenzende vakken' betreft zoals bij de exacte vakken (Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs, 1996).
De conclusie in een evaluatierapport van de tweede fase (Tweede Fase Adviespunt – ministerie van OCW, 2005) is echter dat samenhang tussen schoolvakken maar in zeer beperkte mate gerealiseerd is en dat wiskunde een vak apart is gebleven. Toch blijven beleidsintenties erop gericht vakken binnen de profielen op elkaar af te stemmen (Commissie Toekomst Wiskunde-onderwijs, 2007; Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo, 2006; Van de Giessen e.a., 2007).

De termen samenhang en afstemming worden in publicaties in verschillende betekenissen gebruikt (Geraedts, Boersma, Huijs & Eijkelhof, 2001; Roorda, 2006). In elk van de drie uitdrukkingen 'samenhangende profielen', 'samenhangend onderwijs' en 'samenhangende kennis' komt het begrip samenhang voor. Ze hebben echter betrekking op drie door Van den Akker (2004) onderscheiden niveaus van het curriculum, namelijk het beoogde, het geïmplementeerde en het bereikte curriculum.
Onder *afstemming* versta ik in dit proefschrift een activiteit van docenten op een geïmplementeerd curriculumniveau. Meer specifiek: het realiseren van afspraken tussen docenten over de manier waarop in hun onderwijs relaties tussen schoolvakken worden gelegd. De term *samenhang* hanteer ik op het bereikte curriculumniveau. Meer specifiek: in hoeverre zien leerlingen verbanden tussen leerstof uit verschillende schoolvakken?

Er zijn vaker pogingen gedaan om bij het onderwerp differentiaalrekening de schoolvakken wiskunde en natuurkunde op elkaar af te stemmen. Sinnema en Van Streun (1984) ontwikkelden lesmaterialen waarin natuurkunde en wiskunde op elkaar afgestemd werden aangeboden. Zij rapporteren een significante verbetering van het cijfer op de afsluitende natuurkundetoets. Deze materialen worden echter niet meer in scholen gebruikt. Ze vereisen een nauwkeurige samenwerking en planning van wiskunde- en natuurkunde-docenten. Doorman (2005) ontwikkelde een lessenserie waarin leerlingen de beginselen van kinematica en differentiaalrekening leren via een proces van geleid heruitvinden. Het lesmateriaal kenmerkt zich door een geïntegreerde aanpak, maar niet door afstemming van twee schoolvakken. Deze werkwijze is niet gangbaar omdat scholen beide schoolvakken meestal separaat aanbieden. De genoemde afstemmingspogingen hebben vooralsnog geen structurele invloed gehad op het onderwijs van wiskunde en natuurkunde.

De beleidsintenties betreffende afstemming tussen schoolvakken hebben niet tot verandering van het wiskundeonderwijs geleid. Het onderwijs betreffende het concept afgeleide is echter wel beïnvloed door drie veranderingen die in de afgelopen twintig jaar hebben plaatsgevonden.
In de eerste plaats werden in wiskundeboeken ten tijde van dit onderzoek regelmatig opdrachten in een voorstelbare situatie geplaatst (Drijvers, 2006; Vakontwikkelgroep Wiskunde, 1995; Van Streun, 1994). Deze opdrachten zijn gesitueerd in natuurwetenschappelijke, economische of andere situaties. In de meeste wiskundeboeken werd bij de introductie van de differentiaalrekening behandeld hoe op basis van formules of grafieken van de afgelegde weg een momentane snelheid berekend kan worden of een snelheidsgrafiek gemaakt kan worden (figuur 1.1). Dergelijke theorie en opdrachten kunnen van invloed zijn op het zien van samenhang tussen de schoolvakken natuurkunde en wiskunde. Het gebruik van deze in situaties geplaatste opdrachten kent echter wel problemen. De opdrachten zijn bijvoorbeeld vanuit fysisch perspectief vaak onjuist gesteld (Korsunsky, 2002). De vragen worden namelijk vaak niet gesteld in termen van de natuurwetenschappelijke context en de antwoorden hebben soms geen betekenis in de natuurwetenschappelijke context (Zegers e.a., 2003).



Snelheid en raaklijn

In figuur 4.47 zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...
Hoe dichter B_n bij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB_n lijken op de lijn k die in A de grafiek **raakt**.

De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A. De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A.

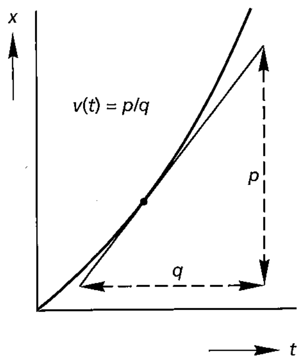
figuur 4.47

Figuur 1.1 Tekst over snelheid en raaklijn in een wiskundeboek voor de tweede fase (Reichard e.a., 2009, p.117)

In de tweede plaats dienen alle leerlingen vanaf de start van de tweede fase bij wiskunde te beschikken over een grafische rekenmachine (Vakontwikkelgroep Wiskunde, 1995; Drijvers, 2000). Deze rekenmachine kan grafieken van functies plotten en bijbehorende tabellen maken. Daarnaast kan de rekenmachine snel een waarde van de afgeleide berekenen, een vergelijking van de raaklijn weergeven en de grafiek van een afgeleide functie plotten.
Ten derde is de rol van wiskunde in natuurkunde vanaf 1998 minder groot geworden. Den Braber (2007) concludeert dat de term 'afgeleide' in de natuurkundeboeken niet meer voorkomt. Kinematica wordt vooral in de grafische representatie behandeld en formules voor bewegingen zijn in beperkte mate aanwezig.
Deze drie veranderingen zijn mogelijk van invloed op de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide.

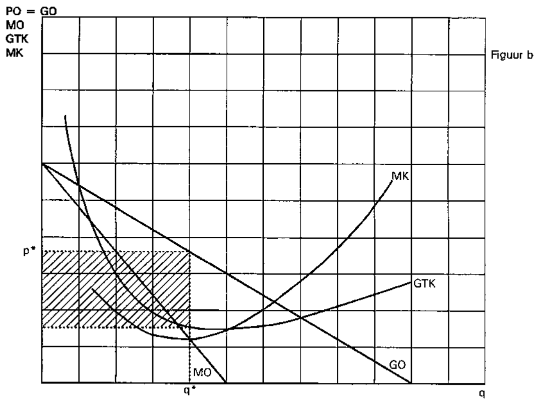
1.3 Probleemstelling

Aspecten van de differentiaalrekening komen uiteraard bij wiskunde maar ook bij de vakken economie en natuurkunde aan bod (zie Den Braber, 2007). Bij elk schoolvak worden eigen accenten gelegd en eigen vakspecifieke procedures behandeld (zie Vos, Den Braber, Roorda & Goedhart, 2010). Dat gebeurt bijvoorbeeld bij de raaklijnmethode (Den Braber, 2007). Dit is een methode voor het grafisch berekenen van een momentane snelheid bij een gegeven x-t grafiek (zie figuur 1.2). Bij natuurkunde gebruiken leerlingen de raaklijn-methode om de snelheid op één moment te berekenen. Vanwege de gewenste nauwkeurigheid moeten leerlingen de helling van de raaklijn over een groot interval berekenen. Bij wiskunde wordt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn juist berekend door de helling van een koorde op een steeds kleiner interval te berekenen (figuur 1.1).



Figuur 1.2 De snelheid op één moment wordt berekend met de raaklijn (Middelink e.a. 1998, p.83)

Een ander voorbeeld is het bepalen van maximale winst bij economie en bij wiskunde (Mantel & Klerks, 2003). Bij economie wordt maximale winst vaak berekend door de marginale kosten en marginale opbrengsten gelijk te stellen of wordt een grafische techniek gebruikt waarbij de oppervlakte van een geconstrueerde rechthoek de maximale winst weergeeft (figuur 1.3). Bij wiskunde daarentegen wordt maximale winst berekend met behulp van het differentiëren van de winstfunctie.
Uit deze voorbeelden blijkt dat aspecten van het concept afgeleide bij wiskunde, natuurkunde en economie worden behandeld zonder dat afstemming heeft plaatsgevonden. Niet bekend is hoe leerlingen hun wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide ontwikkelen in deze situatie. Informatie hierover kan aanwijzingen opleveren voor het afstemmen van onderwijs in verschillende schoolvakken. Om inzicht te krijgen in deze ontwikkeling is gekozen voor een beschrijvend onderzoek waarin de ontwikkeling van leerlingen in de bovenbouw van het vwo geanalyseerd wordt.



Figuur 1.3. De oppervlakte van de gearceerde rechthoek geeft de maximale winst weer (Stichting LWEO, 2005)

1.4 Wetenschappelijke relevantie

De wetenschappelijke relevantie van dit onderzoek is vierledig.

- In diverse studies naar het leren van het concept afgeleide worden verschillende nadrukken gelegd zoals: het limietbegrip van leerlingen (Oehrtman, 2009; Tall, 1992; Tsamir, Raslan & Dreyfus, 2006; Vinner, 1991; Vinner & Dreyfus, 1989); het gebruik van de grafische representatie (Asiala e.a., 1997; Berry & Nyman, 2003; Habre & Abboud, 2006); de rol van de numerieke representatie (Hauger, 2000); het leren van het concept afgeleide bij wiskunde (Delos Santos, 2006; Hähkiöniemi, 2006; Orton, 1983; Zandieh, 1997); de raakvlakken tussen wiskunde en natuurkunde (Basson, 2002; Doorman, 2005; Marrongelle, 2004). Niet eerder onderzocht is het leerproces van leerlingen in een situatie waarin bij verschillende schoolvakken verschillende aspecten van het concept afgeleide worden behandeld. Mijn onderzoek wil bijdragen aan de wetenschappelijke kennis over het leren van het concept afgeleide.

- Hoewel de toespitsing in mijn onderzoek het concept afgeleide is, worden kennis en vaardigheden van leerlingen geanalyseerd vanuit een breder model voor bekwaamheid in het vak wiskunde. In hoofdstuk 2 wordt een beschrijving van wiskundige bekwaamheid gegeven op basis van het model van Kilpatrick, Swafford en Findell (2001). Dit model is gebaseerd op review van onderzoek naar bekwaamheid in verschillende onderdelen van wiskunde, maar nog niet eerder gebruikt met betrekking tot het concept afgeleide. Mijn onderzoek levert informatie over de bruikbaarheid van het model en draagt bij aan de evaluatie en validatie ervan.
- Er zijn verschillende modellen die beschrijven hoe de ontwikkeling van de wiskundige kennis verloopt (Pirie & Kieran, 1994; Tall, 2007a, 2008). Ook de relatie tussen ontwikkeling in conceptuele kennis en procedurele vaardigheden is onderwerp van onderzoek (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Door te kiezen voor een longitudinale aanpak kan mijn onderzoek een bijdrage leveren aan de kennis over de manier waarop bekwaamheid in wiskunde zich ontwikkelt.
- Transfer wordt vaak gedefinieerd als de bekwaamheid om kennis en vaardigheden die in de ene context zijn verworven uit te breiden naar nieuwe contexten (Bransford , Brown & Cocking, 2000). Op basis van een literatuurreview concluderen Alexander en Murphy (1999) dat transfer van kennis en procedures die op school worden geleerd veel minder vaak optreedt dan opleiders en onderzoekers hopen. Dit komt overeen met de in paragraaf 1.2 beschreven ervaringen. Het begrip transfer is echter omstreden zoals blijkt uit de discussie tussen Anderson, Reder en Simon (1996, 1997) en Greeno (1997). Er zijn verschillende modellen voor transfer ontwikkeld (Lobato, 2006). In dit onderzoek wordt één van deze transfermodellen als uitgangspunt genomen. De resultaten van het onderzoek dragen bij aan de evaluatie van het gekozen transfermodel.

1.5 Doelstelling en vraagstelling

Het onderzoek is een studie naar de manier waarop leerlingen wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide ontwikkelen. Het onderzoek bestudeert de manier waarop en de mate waarin leerlingen relaties tussen leerstof uit verschillende schoolvakken gaan zien en gebruiken. Deze kennis levert aanwijzingen voor de opbouw van het onderwijs in het concept afgeleide en mogelijkheden tot afstemming tussen schoolvakken. Daarmee is

dit onderzoek een baseline-studie, dat is een analyse van de huidige situatie om daarmee aanwijzingen te kunnen identificeren voor verbetering van deze situatie.
Om deze ontwikkeling te onderzoeken kan niet volstaan worden met cross-sectioneel onderzoek, maar is gekozen voor een longitudinaal onderzoek. Door dezelfde leerlingen over een langere periode te volgen kan geanalyseerd worden welke ontwikkeling leerlingen doormaken.
Om te onderzoeken welke relaties leerlingen leggen tussen kennis en procedures uit verschillende schoolvakken is er voor gekozen leerlingen opdrachten hardop-denkend te laten oplossen. Dit zijn opdrachten over voorstelbare situaties die deels natuurkundig of economisch van aard zijn. Op deze manier kunnen leerlingen tonen welke kennis en procedures met betrekking tot het concept afgeleide door hen gebruikt worden in een diversiteit aan situaties.
De vraagstelling van dit onderzoek is: *Hoe is in de loop van vwo 4, 5 en 6 de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide?*

1.6 Opzet van het proefschrift

De begrippen die in bovenstaande vraagstelling worden gebruikt, zoals 'wiskundige bekwaamheid', 'concept afgeleide' en 'ontwikkeling' hebben hier nog geen eenduidige betekenis. In het theoretisch kader in hoofdstuk 2 worden de begrippen 'wiskundige bekwaamheid' en 'ontwikkeling' uitgewerkt en vastgelegd. In hoofdstuk 3 wordt deze terminologie geoperationaliseerd voor het concept afgeleide, in het bijzonder de manier waarop natuurkundige en economische aspecten worden gerelateerd aan het wiskundige concept afgeleide. Bijlage E geeft een overzicht van de betekenis van kernbegrippen in dit proefschrift. Als een kernbegrip in het proefschrift wordt geïntroduceerd wordt het begrip cursief weergegeven.
De ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid wordt onderzocht door middel van een beschrijvende, longitudinale multiple-casestudie. In hoofdstuk 4 wordt de onderzoeksopzet beschreven waarmee deze ontwikkeling wordt gemeten en geanalyseerd. Omdat in dit onderzoek ook wordt gezocht naar factoren die van invloed kunnen zijn op de ontwikkeling van leerlingen, wordt in hoofdstuk 5 een overzicht gegeven van het onderwijs aan de betreffende leerlingen over het concept afgeleide bij wiskunde, natuurkunde en economie.
De hoofdstukken 6 en 7 beschrijven de resultaten: in hoofdstuk 6 staan de individuele casussen centraal terwijl in hoofdstuk 7 een cross-case analyse is uitgevoerd om de onderzoeksvragen te kunnen beantwoorden. Hoofdstuk 8 sluit af met conclusies, discussie en aanbevelingen.

Hoofdstuk 2 Wiskundige bekwaamheid

2.1 Introductie

In mijn onderzoek naar de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid zal ik veranderingen in zichtbaar gedrag van leerlingen analyseren. Veel didactisch onderzoek naar het leren en begrijpen van wiskunde gaat uit van het idee dat bij leerlingen kennis intern georganiseerd is in een bepaalde structuur. De structuur zelf is niet zichtbaar maar functioneert als een theoretisch verklaringsmodel voor het leren en begrijpen van wiskunde. In paragraaf 2.2 geef ik een overzicht van modellen voor deze mentale representaties.

Ik zal me in de paragrafen 2.3 tot en met 2.8 concentreren op een omschrijving van wiskundige bekwaamheid in termen van zichtbaar gedrag. Daarbij zal ik me baseren op het model van Kilpatrick e.a. (2001) voor 'mathematical proficiency'. Kilpatrick e.a. benoemen een vijftal componenten die onderdeel zijn van wiskundige bekwaamheid met indicatoren om elke component te beschrijven. In dit onderzoek zal ik een keuze maken uit deze indicatoren. In paragraaf 2.3 wordt het volledige model beschreven. De paragrafen 2.4 en 2.5 concentreren zich op de eerste twee componenten uit het model. In paragraaf 2.6 volgt een beschrijving van de overige drie componenten. In paragraaf 2.7 ga ik in op de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid. Ten slotte volgt in paragraaf 2.8 een samenvattend schema waarin zichtbaar leerlinggedrag gekoppeld is aan de gekozen indicatoren.

De beschrijving van wiskundige bekwaamheid heeft in dit hoofdstuk betrekking op een breed gebied van onderwerpen in de wiskunde. In hoofdstuk 3 zal ik dat verder uitwerken voor het onderwerp uit dit onderzoek: de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide.

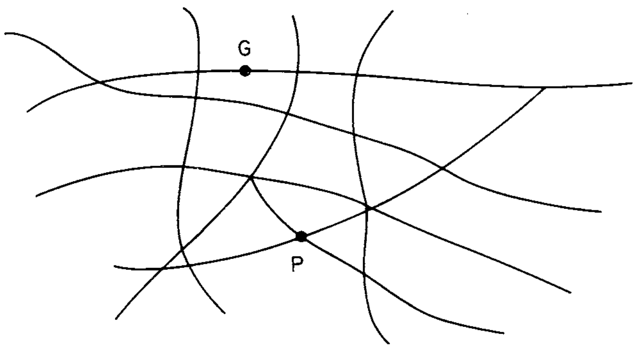
2.2 Mentale representaties en zichtbaar gedrag

Het begrip 'mentale representatie' duidt op een interne kennisstructuur. Over dit begrip schrijven Kilpatrick e.a. (2001):

> *Fundamental* (in the work of cognitive scientists, GR) *has been the central role of mental representations. How learners represent and connect pieces of knowledge is a key factor in whether they will understand it deeply and can use it in problem solving. Cognitive scientists have concluded that competence in an area of inquiry depends upon knowledge that is not merely stored but represented mentally and organized (connected and structured) in ways that facilitate appropriate retrieval and application.* (Kilpatrick e.a., pp.117, 118)

De term ‘mentale representatie’ staat voor een georganiseerd geheel van kennis, dat met nieuwe kennis kan worden uitgebreid. Er bestaan diverse termen voor beschrijvingen van deze interne kennisstructuur, zoals ‘schema’ (Skemp, 1977, 1979, 1987), ‘frames’ (Davis, 1984; Minsky,1975), ‘networks of knowledge’ (Hiebert & Carpenter, 1992) en ‘concept image’ (Tall & Vinner, 1981).
Al deze termen benadrukken het belang van verbindingen tussen verschillende elementen van de kennis die een persoon bezit. Hieronder licht ik dat toe aan de hand van het model van ‘schema’ van Skemp en ‘concept image’ van Tall en Vinner.

Skemp gebruikt het woord ‘schema’ voor “*a conceptual structure existing in its own right, independently of action*” (Skemp, 1979, p.219). Skemp gebruikt het idee van een netwerk als een visualisatie van een schema om eigenschappen van schema’s te verduidelijken (figuur 2.1).



Figuur 2.1 Visualisatie van een schema (Skemp, 1979, p. 144)

In deze visualisatie komt de verbondenheid van kennis tot uiting. Bij het oplossen van een probleem zoekt een oplosser een route van de ‘problem state’ (P) naar de oplossing, de ‘goal state’ (G). De oplosser zoekt in het netwerk een route om het probleem te kunnen oplossen. Soms zijn meerdere routes mogelijk, of ontwikkelt zich een voorkeur voor een hoofdroute om van P naar G te komen. ‘Leren’ is in de terminologie van Skemp het proces van assimileren van nieuwe kennis in aanwezige schema’s of het accommoderen van bestaande schema’s.
Het model van een ‘schema’ geeft aan de ene kant een toegankelijk beeld van de organisatie en samenhang van kennis. Aan de andere kant is het moeilijk nauwkeurig te beschrijven wat in Skemps visualisatie de knopen en lijnen van een schema voorstellen. Dit blijkt uit diverse reacties op en specificaties van dit model (Davis & Tall, 2002; Olive & Steffe, 2002; Sfard, 2002; Thomas, 2002).

Bingolbali en Monaghan (2008) beschrijven in een literatuurreview de historie van het begrip ‘concept image’ in de wiskundedidactische literatuur. Vinner en Hershkowitz (1980) introduceerden het begrip ‘concept image’. Een jaar later werd het meer uitgewerkt door Tall en Vinner (1981). Zij verstaan onder het begrip ‘concept image’ een interne kennisstructuur:

> *the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.* (Tall & Vinner, 1981, p.152)

De term ‘concept image’ is een ruim begrip en gaat verder dan de wiskundige kennis die iemand aan een bepaald concept koppelt. Het omvat de totale cognitieve structuur die een persoon associeert met een concept. Een ‘concept image’ wordt opgebouwd in de loop van jaren door allerlei ervaringen en verandert als een individu ouder wordt en nieuwe stimuli krijgt. Hierdoor is het ‘concept image’ van een persoon volstrekt uniek en continu aan verandering onderhevig. Dit sluit aan bij constructivistische leertheorieën, waarin leren gezien wordt als een constructief proces waarin de lerende zijn eigen kennis construeert en ‘positioneert’ in de reeds aanwezige cognitieve structuur.

Vanaf de introductie wordt het begrip ‘concept image’ in veel onderzoeken gebruikt als theoretisch kader. Aanvankelijk vooral bij het bestuderen van individuele cognitieve ontwikkelingen, maar sinds kort ook in socio-culturele studies naar de invloed van de sociale en culturele omgeving op de ontwikkeling van het ‘concept image’ van een leerling (Bingolbali & Monaghan, 2008). Volgens Bingolbali en Monaghan is het begrip ‘concept image’ een robuust begrip omdat het in essentie aangeeft dat leerlingen allerlei soorten ideeën meebrengen wanneer ze aan wiskundeopdrachten werken.

De begrippen ‘schema’ en ‘concept image’ zijn modellen voor een interne kennisstructuur. Het probleem is dat deze kennisstructuur niet direct zichtbaar is (Hiebert & Carpenter, 1992). Uitspraken over de kennisstructuur kunnen slechts indirect worden afgeleid van handelingen en uitspraken van een persoon. Dit onderscheid tussen kennis die een persoon heeft en kennis die zichtbaar is in het handelen van een persoon komt in meerdere onderzoeken naar voren (Duffin & Simpson, 2000; Goldin, 2002; Greer, 2009; Kaput, 1987; Mason & Spence, 1999; Selden, Selden, Hauk & Mason, 2000).

Duffin en Simpson (2000) beschrijven hun zoektocht naar een eenduidige betekenis van het woord ‘understanding’. Zij onderscheiden drie componenten, namelijk ‘building’, ‘having’ en ‘enacting’. Met de term ‘building’ bedoelen ze de vorming van verbindingen in interne mentale structuren, met ‘having’ de toestand van de verbindingen op een bepaald moment en met ‘enacting’ het gebruik van de beschikbare verbindingen tijdens het uitvoeren van een taak. Volgens hen is er voor een onderzoeker geen mogelijkheid directe toegang te krijgen tot de componenten ‘building understanding’ en ‘having understanding’, terwijl in de component ‘enacting understanding’ interne aspecten zichtbaar worden bij het praten, schrijven of tekenen. Een hierbij optredend probleem is dat personen bij het oplossen van een probleem niet altijd de kennis benutten die ze wel bezitten (Newton, Star & Lynch, 2010; Selden e.a., 2000).

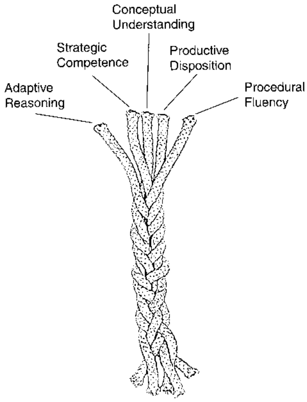
In dit onderzoek ga ik er van uit dat leerlingen beschikken over een interne kennisstructuur die zich ontwikkelt, maar die zich aan directe waarneming onttrekt. De wiskundige bekwaamheid van leerlingen zal ik beschrijven in termen van observeerbaar gedrag.

2.3 Wat is wiskundige bekwaamheid?

Met de uitdrukking wiskundige bekwaamheid baseer ik me op het model van *mathematical proficiency* door Kilpatrick, Swafford en Findell (2001). Zij gebruiken dit model voor het brede scala van aspecten die belangrijk zijn voor het succesvol leren en kunnen toepassen van wiskunde in diverse situaties. Deze wiskundige bekwaamheid is het centrale thema in dit proefschrift.
Het model van Kilpatrick e.a. (2001) is ontwikkeld in samenspraak met wiskundigen, leerpsychologen en wiskundedidactici en is gebaseerd op een review van onderzoek naar het leren en onderwijzen van wiskunde (zie Kilpatrick, 2001).
In het model van wiskundige bekwaamheid onderscheiden Kilpatrick e.a. (2001) vijf componenten, namelijk:

- *conceptual understanding - comprehension of mathematical concepts, operations, and relations;*
- *procedural fluency - skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately;*
- *strategic competence - ability to formulate, represent, and solve mathematical problems;*
- *adaptive reasoning - capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification;*
- *productive disposition - habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.* (p. 116)

Kilpatrick e.a. (2001) benadrukken dat de vijf componenten sterk met elkaar verweven zijn en met elkaar samenwerken als iemand succesvol wiskunde beoefent. Deze verwevenheid wordt gevisualiseerd door vijf strengen die samen één draad vormen (figuur 2.2). De vijf componenten worden in dit proefschrift aangeduid met de volgende Nederlandse termen: conceptueel begrijpen, procedureel vloeiend werken, strategisch competent zijn, adaptief redeneren en een productieve houding hebben.



Figuur 2.2 Visualisatie van het model van wiskundige bekwaamheid (Kilpatrick e.a., 2001, p. 117)

Ook andere onderzoekers hebben wiskundige bekwaamheid ingedeeld in vergelijkbare componenten. Schoenfeld (1992, 2007) gebruikt de term 'think mathematically' die zowel kennis, houdingen als metacognitieve vaardigheden bevat. Van Streun (2001) beschrijft een onderverdeling van kennis die van belang is bij het leren van wiskunde in vier componenten aangeduid met de steekwoorden 'weten dat', 'weten hoe', 'weten waarom' en 'weten over weten'. Een meer algemene indeling van kennis wordt gegeven door Anderson en Krathwohl (2001) die, op basis van de taxonomie van Bloom en Krathwohl (1956), een hernieuwde taxonomie maken waarbij de kennisdimensie wordt ingedeeld in 'factual', 'conceptual', 'procedural' en 'metacognitive knowledge'.

Bovenstaande indelingen vertonen overeenkomsten met elkaar. In mijn onderzoek heb ik het model van Kilpatrick e.a. (2001) gekozen als uitgangspunt vanuit de volgende overwegingen. In de eerste plaats beschrijft het model bekwaamheid in wiskunde en is daarmee specifieker gericht op wiskunde dan de indeling van Anderson en Krathwohl (2001). Het model van Kilpatrick e.a. is gebaseerd op het leren van rekenen, maar wordt ook toegepast op andere onderdelen van de wiskunde zoals algebra, meetkunde, statistiek en kansrekening. In dit onderzoek breid ik het toepassingsgebied van het model uit naar de differentiaalrekening.
In de tweede plaats is gekozen voor het model van Kilpatrick e.a. omdat de componenten beschreven zijn in termen van zichtbaar gedrag van leerlingen. In mijn onderzoek analyseer ik het werk van leerlingen tijdens opdracht-gebaseerde interviews. Daarom is een beschrijving van indicatoren van wiskundige bekwaamheid in termen van zichtbaar gedrag noodzakelijk. In dit opzicht is het model uitgebreider dan de beschrijvingen van Schoenfeld (1992, 2007) en Van Streun (2001).

2.4 Conceptueel begrijpen

Kilpatrick e.a. (2001) beschrijven *conceptueel begrijpen* als "*comprehension of mathematical concepts, operations, and relations*". Op basis van de beschrijving van 'conceptueel begrijpen' identificeer ik in dit onderzoek enkele indicatoren die in gedrag van leerlingen zichtbaar kunnen worden zoals:

- het gemak waarmee leerlingen zich feiten en methoden kunnen herinneren, die feiten en methoden kunnen gebruiken en, indien nodig, kunnen reconstrueren;
- het kunnen representeren van situaties op verschillende manieren en het aan elkaar kunnen relateren van representaties;
- het herkennen van overeenkomsten tussen - oppervlakkig gezien - verschillende situaties;
- het 'uitpakken' van geclusterde kennis.

De eerste indicator van 'conceptueel begrijpen' wordt zichtbaar wanneer leerlingen zich feiten of methoden gemakkelijk kunnen herinneren, die ook kunnen gebruiken en indien nodig kunnen reconstrueren:

> *Because facts and methods learned with understanding are connected, they are easier to remember and use, and they can be reconstructed when forgotten.* (Kilpatrick e.a., 2001, p.118)

Zichtbaar gedrag is bijvoorbeeld de snelheid waarmee een leerling zich iets kan herinneren. De snelheid waarmee feiten en methoden door leerlingen worden ingezet vormt zo een aanwijzing voor de kwaliteit van hun 'conceptueel begrijpen'. In het algemeen wordt aangenomen dat een langere responsietijd duidt op zwakker verbonden en minder toegankelijke kennis (Anderson, 1990; Lawson & Chinnappan, 2000).
Daarnaast wordt 'conceptueel begrijpen' zichtbaar wanneer een leerling een vergeten feit of een methode zelf kan reconstrueren door relaties te leggen met andere beschikbare kennis.

Een tweede indicator van 'conceptueel begrijpen' is de bekwaamheid situaties op verschillende manieren te representeren en deze representaties met elkaar te verbinden, dat wil zeggen overeenkomsten en verschillen te zien:

> *A significant indicator of conceptual understanding is being able to represent mathematical situations in different ways* […] *it is important to see how the various representations connect with each other, how they are similar, and how they are different*. (Kilpatrick e.a., 2001, p.119)

Als voorbeeld beschrijven Kilpatrick e.a. (2001) meerdere representaties die leerlingen kunnen gebruiken om twee ongelijknamige breuken op te tellen. Ze kunnen dat doen door een diagram te tekenen, door concrete materialen te gebruiken of door breuken op een getallenlijn aan te geven. Deze indicator is gebaseerd op het spreken over of het handelen met meerdere representaties,

waarbij een wisselwerking plaatsvindt tussen de representaties (Goldin, 2002).
Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen en Verschaffel (2009) beschrijven op basis van literatuuronderzoek de voor- en nadelen van het gebruik van meerdere representaties. Zij beschrijven dat in meerdere onderzoeken wordt gerapporteerd dat het oplossen van wiskundige problemen ondersteund wordt door het gebruik van meerdere representaties en het flexibel kunnen switchen tussen representaties. Begrip dat is opgebouwd door meerdere representaties te gebruiken, is breder, dieper (Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007), meer robuust en meer flexibel (Ainsworth, Bibby & Wood 2002). Ook zijn leerlingen vaardiger in het oplossen van problemen (Kaput, 1998; Even, 1998) dan wanneer één representatie is gebruikt. Daartegenover blijkt uit ander onderzoek dat gebruik van meerdere representaties het oplossen van wiskundeproblemen kan hinderen. Acevedo Nistal e.a. (2009) beschrijven studies die concluderen dat het leerlingen veel tijd en aandacht kost om de betekenis van representaties te bevatten. Als leerlingen niet de meest geschikte representatie kiezen, kan dit het uitvoeren van wiskundige taken belemmeren (Ainsworth e.a, 1998).
In dit onderzoek ga ik uit van de vaak gerapporteerde conclusie dat het gebruik van meerdere representaties behulpzaam is bij het oplossen van problemen. Deze indicator identificeert het gebruik van meerdere representaties en het aan elkaar relateren van representaties als onderdeel van het 'conceptueel begrijpen'.

Een derde indicator van 'conceptueel begrijpen' is het zien van overeenkomsten in situaties die - oppervlakkig gezien - niet gerelateerd zijn:

> *Conceptual understanding frequently results in students having less to learn because they can see the deeper similarities between superficially unrelated situations.* (Kilpatrick e.a., 2001, p.120)

Deze indicator heeft raakvlakken met het gebruiken van analogieën (Dreyfus & Eisenberg, 1996; Gentner, 1983; Gentner, Loewenstein & Thompson, 2003), het construeren van isomorfismen tussen situaties (Greer & Harel, 1998; Powel & Maher, 2003; Uptegrove & Maher, 2004) en het optreden van transfer (Bransford e.a., 2000). Om de keuzes toe te lichten die ik voor dit onderzoek maak, zal ik deze begrippen eerst nader toelichten.
Gentner (1983) beschrijft 'analogie' als een afbeelding van termen van een (beter bekend) basisdomein naar een doeldomein. Gentner e.a. (2003) verwijzen naar diverse onderzoeken waaruit ze concluderen dat mensen vaak niet in staat zijn zich relevante voorbeelden in herinnering te roepen die ze eerder hebben gezien. Dat is vooral problematisch als twee situaties oppervlakkig gezien verschillen. In veel van de door Gentner e.a. genoemde onderzoeken is van te voren vastgesteld welke analogie proefpersonen zouden kunnen zien, en wordt gescoord in hoeverre deze herkenning ook

daadwerkelijk optreedt (zie bijvoorbeeld Gick & Holyoak, 1980; Bassok & Holyoak, 1989). In plaats van het analyseren van de herkenning van vooraf geconstrueerde analogieën noemen Dreyfus en Eisenberg (1996) dat het zien van analogieën uniek is voor ieder individu. Deze uitspraak sluit aan bij theorieën over leren waarin de eigen constructie van kennis centraal staat. De twee aspecten van analogieën die hierin naar voren komen zijn: het herkennen van door onderzoekers opgestelde analogieën en de eigen constructie van analogieën door lerenden.

Deze twee aspecten komen ook voor in de definitie van het begrip 'isomorfisme' tussen situaties (Greer & Harel, 1998). Indertijd betrof de ontologische definitie van isomorfisme het zien van overeenkomsten tussen situaties die geanalyseerd worden op basis van normatieve criteria die door de onderzoeker vooraf zijn vastgesteld. Greer en Harel stellen hier hun opvatting van isomorfismen tegenover. Het zijn:

> *components of mental representations constructed by individuals in the course of assimilating and dealing with given situations.* (p.11)

Het zien van analogieën is nauw verbonden met het begrip 'transfer'. Transfer wordt vaak gedefinieerd als de bekwaamheid iets dat in de ene context is geleerd uit te breiden naar nieuwe contexten (Bransford e.a., 2000). Over het begrip transfer worden al lange tijd discussies gevoerd, zoals bijvoorbeeld tussen Greeno (1997) enerzijds en Anderson, Reder en Simon (1996, 1997) anderzijds. Anderson e.a. benaderen transfer vanuit een cognitivistisch perspectief en tonen op basis van onderzoeken aan dat transfer tussen taken mogelijk is. Greeno plaatst hier tegenover het gesitueerde perspectief, waarin niet gesproken wordt over transfer tussen taken, maar over succesvolle participatie van een persoon in verschillende situaties. Het perspectief verschuift hierbij van de 'taak' naar de 'lerende'. Greeno beargumenteert dat in het gesitueerde perspectief de uitdrukking 'generality of knowing' meer accuraat is dan 'transfer of knowledge'.

Transfer zoals beschreven vanuit het cognitief perspectief als 'het toepassen van kennis geleerd in de ene situatie in een nieuwe situatie' wordt door Lobato en Siebert (2002) 'traditional transfer' noemen. Carraher en Schlieman (2002) bepleiten af te stappen van transfer als 'research construct' vanwege de associatie van transfer met de 'transportmetafoor' – het passief overbrengen van kennis van de ene situatie naar de andere wanneer een persoon de overeenkomst tussen situaties herkent (geciteerd in Lobato, 2006). Lobato en Siebert pleiten daarentegen voor een alternatieve benadering van het transferbegrip, door hen 'actor-oriented transfer' genoemd. Bij *actor-georiënteerde transfer* gaat het om de persoonlijke constructie van relaties tussen verschillende activiteiten en kijkt de onderzoeker naar de invloed van voorgaande activiteiten op huidige activiteiten en naar de manier waarop de leerling verschillende situaties als overeenkomstig ziet of als overeenkomstig construeert (Lobato, 2003).

Het zien van overeenkomsten tussen - oppervlakkig gezien - verschillende situaties zal ik in mijn onderzoek beschouwen vanuit het perspectief van actorgeoriënteerde transfer. Vanuit het perspectief van de lerende analyseer ik de persoonlijke constructie van relaties tussen verschillende situaties. Dit wordt zichtbaar als een leerling relaties tussen verschillende situaties benoemt en gebruikt tijdens het uitvoeren van een taak. Hierbij zal ik, aansluitend bij Janvier (1981), de uitdrukking *situatie* gebruiken voor een beschrijving in een opdracht die voor leerlingen voorstelbaar is in de werkelijkheid.

De vierde indicator van 'conceptueel begrijpen' is het kunnen 'uitpakken' van begrippen die samengevat of ingekapseld zijn in grotere clusters:

> *Their* (students who have conceptual understanding, GR) *understanding has been encapsulated into compact clusters of interrelated facts and principles.* […] *If necessary, however, the cluster can be unpacked if the student needs to explain a principle, wants to reflect on a concept, or is learning new ideas.* (Kilpatrick e.a., 2001, p.120)

Centraal hierin staat het idee van geclusterde feiten en principes. Het clusteren van feiten en principes wordt door Gray en Tall (2007) aangeduid met de term 'compression'. De wiskundige Thurston maakt de kracht van compressie duidelijk wanneer hij beschrijft hoe een persoon soms lange tijd kan worstelen, stap voor stap, met een wiskundig proces of idee. Maar heeft hij het eenmaal begrepen dan vindt er mentale compressie plaats. Het idee of proces wordt als geheel onthouden en kan opnieuw gebruikt worden als stap in een nieuw mentaal proces (Thurston, 1990). Compressie kan op verschillende manieren plaatsvinden. In de eerste plaats door het categoriseren van concepten waarbij de categorisering zelf weer een concept wordt (Lakoff, 1987). In de tweede plaats door het vormen van een schema, zoals beschreven in de APOS theorie (Dubinsky, 1991; Cottril e.a., 1996.) waarbij

> *an Action is internalised as a Process and is encapsulated into an Object, connected to other knowledge within a Schema; a schema may also be encapsulated as an object*. (Tall, 2007a, p.4)

Deze vorm van compressie ligt ook aan de basis van de dualiteit tussen het proces en het object, zoals beschreven door Sfard (1991). Ook het begrip 'procept' zoals beschreven door Gray en Tall (1994) is een vorm van compressie. In de terminologie van Gray en Tall kent een persoon een procept wanneer zowel het object, bijvoorbeeld een symbool, alsmede de achterliggende processen bekend zijn.

Tall (2007a) beschrijft een derde manier van compressie, namelijk de ontwikkeling in het gebruik van één procedure leidend tot een flexibel gebruik van meerdere procedures die dan op hun beurt gecomprimeerd kunnen worden tot één procept. Deze vorm van compressie komt terug in paragraaf 2.6.

Het 'uitpakken van geclusterde kennis' is een complex verschijnsel dat op meerdere manieren zichtbaar kan worden. In dit onderzoek volg ik de beschrijving van Kilpatrick e.a. (2001). Zij benoemen als zichtbaar gedrag dat iemand een concept of een principe kan uitleggen of er op kan reflecteren. Dit uitleggen kan plaatsvinden door het concept of principe te relateren aan andere concepten of principes.

2.5 Procedureel vloeiend werken

De tweede component van wiskundige bekwaamheid is *procedureel vloeiend werken*.
Kilpatrick e.a. (2001) schrijven hierover:

> *Procedural fluency refers to knowledge of procedures, knowledge of when and how to use them appropriately, and skill in performing them flexibly, accurately, and efficiently.* (p. 121)

Ik kies de Nederlandse vertaling 'vloeiend' omdat dit, meer dan bijvoorbeeld 'vlot', de door Kilpatrick e.a. beschreven flexibiliteit, accuratesse en efficiëntie omvat.
Een procedure is bij Kilpatrick e.a. (2001) een algoritme of een methode om een bepaald type problemen op te lossen. Het gaat daarbij om goed gedefinieerde methoden en niet om heuristieken. In dit onderzoek worden deze oplossingsmethoden aangeduid met de term *procedures*.
De door Kilpatrick e.a. (2001) gegeven beschrijving van 'procedureel vloeiend werken' wijkt af van de definities van 'procedural skills' (Rittle-Johnson e.a., 2001) en 'procedural knowledge' (Hiebert & Carpenter, 1992). Rittle-Johnson e.a. definiëren 'procedural skills' als het kunnen uitvoeren van een serie acties om een probleem op te lossen. Daarentegen valt onder 'procedureel vloeiend werken' ook het kiezen van een geschikte procedure en de flexibiliteit in de uitvoering van procedures.
Voor 'procedureel vloeiend werken' onderscheid ik op basis van de beschrijving van Kilpatrick e.a. (2001) vier indicatoren van zichtbaar gedrag, namelijk:

- de keuze voor een adequate procedure bij een taak;
- het aan elkaar relateren van procedures;
- het accuraat en efficiënt uitvoeren van procedures;
- het flexibel uitvoeren van procedures.

Hieronder zal ik deze indicatoren apart toelichten.

Een eerste indicator van 'procedureel vloeiend werken' is het kiezen van een adequate procedure bij een taak, dat is een procedures die passend is bij de taak en tot een oplossing kan leiden. Bij het uitvoeren van een taak herkent de leerling eerst welke procedure geschikt is om de taak uit te voeren. Vervolgens kan de leerling overgaan tot het inzetten van deze procedure (Van Streun, 1991).

De tweede indicator is het aan elkaar relateren van procedures:

> *Procedural fluency also supports the analysis of similarities and differences between methods of calculating.*(Kilpatrick e.a., 2001, p.120)

Dit is een aanvulling op de eerste indicator omdat een leerling mogelijkerwijs betekenisloos gememoriseerde procedures toepast bij een taak. Dit laatste kan volgens Kilpatrick e.a. (2001) extreme vormen aannemen bij leerlingen die elke procedure geïsoleerd onthouden. In de visualisatie van een schema door Skemp (figuur 2.1) is het betekenisloos toepassen van gememoriseerde procedures weer te geven als één route van de 'problem state' (P) naar de 'goal state' (G). De leerling heeft dan voor elk type probleem een eigen procedure. Skemp noemt dit 'instrumental understanding'.
Een leerling die op deze manier procedures kiest kan wel vaardig zijn in de keuze van een adequate procedure, maar kan niet beargumenteren waarom de voorkeur gegeven wordt aan de ene procedure boven de andere. Zijn repertoire bestaat uit geïsoleerd onthouden procedures. Daartegenover staat een leerling die bij een taak procedures aan elkaar kan relateren. In dat geval is er sprake van een *samenhangend repertoire*. De term *repertoire* staat voor het geheel aan procedures dat een leerling gebruikt. Het noemen van overeenkomsten of verschillen tussen procedures, bijvoorbeeld, maakt zichtbaar dat leerlingen dit aspect van het 'procedureel vloeiend werken' beheersen.

De derde indicator betreft het accuraat en efficiënt uitvoeren van procedures. *Accuraat* werken betekent in dit verband het foutloos uitvoeren van een procedure. *Efficiënt* werken geeft aan dat de leerling met een zekere snelheid de stappen van een procedure uitvoert en dat hij tijdens de uitvoering van de stappen niet hoeft na te denken over elke vervolgstap. Procedures die goed zijn geoefend en onthouden, kunnen door leerlingen snel uitgevoerd worden met weinig mentale inspanning (Hiebert & Carpenter, 1992). Daardoor blijft meer mentale capaciteit over voor andere aspecten. Dit sluit aan bij cognitive-load-theorieën, waarin is aangetoond dat geautomatiseerde handelingen ruimte geven aan het werkgeheugen voor andere activiteiten (Van Merriënboer & Sweller, 2005).

De vierde indicator is het flexibel uitvoeren van procedures. Flexibiliteit in het uitvoeren van een oplossingsprocedures is een belangrijk onderdeel van 'procedureel vloeiend werken' (Hatano, 2003; Newton e.a., 2010; Star & Rittle-Johnson, 2008; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, Van Dooren, 2009; Warner, 2005).

Verschaffel e.a. (2009) schrijven dat in de literatuur de term ‘flexibiliteit’ vooral gebruikt wordt voor het switchen tussen verschillende strategieën, maar zij gebruiken zelf dit begrip voor het gebruik van meerdere strategieën. Flexibiliteit in procedures kan op beide manieren in zichtbaar gedrag naar voren komen: het gebruik van meerdere procedures, dus de inzet van een *breed repertoire* en daarnaast het switchen tussen procedures tijdens de berekening als blijkt dat een andere procedure meer adequaat is.

2.6 Strategisch competent zijn, adaptief redeneren en een productieve houding hebben

Naast de conceptuele en de procedurele component worden in het model van Kilpatrick e.a. (2001) nog drie andere componenten beschreven.
De derde component van wiskundige bekwaamheid is het ‘strategisch competent zijn’:

> *Strategic competence refers to the ability to formulate mathematical problems, represent them, and solve them.* (Kilpatrick e.a., 2001, p.124)

Kilpatrick e.a. (2001) beschrijven twee hoofdonderdelen van strategische competentie. Het eerste onderdeel betreft het modelleren. Het tweede onderdeel betreft het productief denken om niet-routineproblemen op te lossen. Niet-routine problemen zijn problemen waarvoor de leerling niet direct een adequate procedure paraat heeft. In dit onderzoek wordt geen nadruk gelegd op de modelleerstappen zoals het opstellen van een wiskundig model bij een gegeven probleemsituatie. Het tweede genoemde onderdeel, het productief denken om niet-routineachtige problemen op te lossen, speelt in dit onderzoek wel een rol. Leerlingen zullen in dit onderzoek opdrachten tegenkomen waarvoor ze niet direct een standaardoplossing kunnen bedenken. Volgens Kilpatrick e.a. (2001) is in dat geval het productief denken en een flexibele benadering een belangrijke vereiste. Uit de gebruikte voorbeelden blijkt dat zij het begrip productief denken nauw relateren aan het gebruik van heuristische methoden. Dit zijn methoden die kunnen helpen bij het gericht zoeken naar de oplossing van een probleem zonder dat het vinden van een oplossing gegarandeerd is (Polya, 1945; Van Streun, 1989, 1991).
Of een leerling heuristische methoden gebruikt wordt zichtbaar in zijn handelen in niet-routineachtige situaties. Als een leerling niet direct herkent met welke procedure een opdracht opgelost kan worden, zal hij moeten zoeken naar een goede oplossingsstrategie. Daarbij kan de leerling heuristische methoden inzetten die vervolgens kunnen leiden tot een keuze voor een passende procedure.

De laatste twee componenten van wiskundige bekwaamheid in het model van Kilpatrick e.a. (2001) zijn *adaptief redeneren* en *een productieve houding hebben*:

> *Adaptive reasoning refers to the capacity to think logically about the relationships among concepts and situations. One uses it to navigate through the many facts, procedures, concepts, and solution methods and to see that they all fit together in some way, that they make sense.* (Kilpatrick e.a, 2001, p.129)
>
> *Productive disposition refers to the tendency to see sense in mathematics, to perceive it as both useful and worthwhile, to believe that steady effort in learning mathematics pays off, and to see oneself as an effective learner and doer of mathematics.* (Kilpatrick e.a, 2001, p.131)

'Adaptief redeneren' is bijvoorbeeld zichtbaar als een leerling zijn werk kan rechtvaardigen. Het gaat dan niet alleen om het leveren van een formeel bewijs, maar ook om informele uitleg en intuïtieve redeneringen. Onder 'een productieve houding hebben' valt bijvoorbeeld de overtuiging dat wiskunde te leren is en geloven in eigen capaciteiten.

De nadruk in dit onderzoek ligt op de ontwikkeling van de leerling met betrekking tot het concept afgeleide. De kennis en vaardigheden bij dit onderwerp zullen vooral zichtbaar worden in de eerste twee componenten, namelijk 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken'. De drie componenten, 'strategisch competent zijn', 'adaptief redeneren' en 'een productieve houding hebben' zijn meer algemeen van aard en minder specifiek voor het concept afgeleide. In mijn onderzoek zal ik de stappen die een leerling maakt om van de opdracht naar een oplossing te komen analyseren op basis van de indicatoren die afgeleid zijn van de twee eerste componenten.

2.7 De ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid

Zoals beschreven in de vorige paragrafen bestaat wiskundige bekwaamheid uit vijf verschillende componenten die opgesplitst zijn in indicatoren van zichtbaar gedrag. Wiskundige bekwaamheid is een veelzijdig begrip. Dat maakt het lastig uitspraken te doen over de wiskundige bekwaamheid van een persoon. Schoenfeld (1992) gebruikt de uitdrukking 'mathematical thinking'. Deze uitdrukking heeft veel overeenkomsten met de term wiskundige bekwaamheid zoals ik die heb omschreven. Hij schrijft dat er geen samenhangend raamwerk is dat verklaart hoe de verschillende componenten van 'mathematical thinking' op elkaar inwerken. Het is moeilijk te doorgronden hoe de vijf genoemde componenten van wiskundige bekwaamheid met elkaar verweven zijn.
Nog complexer is het analyseren van de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid. Kilpatrick e.a. (2001) schrijven dat bij het leren elke component zich gelijktijdig met de andere ontwikkelt:

> *Learning is not an all-or-none phenomenon, and as it proceeds, each strand of mathematical proficiency should be developed in synchrony with the others.* (p. 133)

Newton e.a. (2010) geven een overzicht van studies die de relatie tussen twee van de vijf componenten, namelijk conceptuele en procedurele kennis, onderzoeken. In studies van Rittle-Johnson en Alibali (1999) en Rittle-Johnson e.a. (2001) wordt geconcludeerd dat conceptuele en procedurele kennis zich tegelijk in iteratieve stappen ontwikkelen en niet na elkaar. Er is geen onderzoek bekend naar de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid vanuit een analyse van alle componenten in samenhang.
Wel hebben verschillende onderzoekers modellen ontwikkeld over de manier waarop conceptuele kennis zich ontwikkelt bij het leren van de leerlingen. Bijvoorbeeld: ‘growth in understanding’ (Pirie & Kieran, 1994), ‘building understanding’ (Hiebert & Carpenter, 1992), ‘cognitive development through three worlds of mathematics’ (Tall, 2008) en de ‘niveautheorie’ (Van Hiele, 1973). In het volgende bespreek ik de modellen van Pirie en Kieran (1994) en van Tall (2008).

Het Pirie-Kieran-model geeft een verklaring van geobserveerd gedrag van leerlingen. Het model is een analysekader waarin ‘growth of understanding’ gezien wordt als een actief proces waarbij leerlingen heen en weer gaan tussen een aantal lagen. Het model beschrijft het beter gaan begrijpen als het pendelen tussen deze lagen. Een leerling vormt zich op basis van zijn al bestaande, primitieve kennis van het concept (laag 1) eerst een beeld van een concept (laag 2) waarna dit beeld zich consolideert (laag 3). Vervolgens ontdekt de leerling eigenschappen van het concept (laag 4). De daaropvolgende vier lagen zijn verdergaande stappen die te maken hebben met abstraheren, reflecteren, overzien van de structuur van een concept en het creëren van nieuwe vragen over het concept. Leerlingen leggen volgens Pirie en Kieran (1994) in het leerproces geen lineair proces af van de eerste naar de achtste laag, maar blijken heen en weer te pendelen tussen de verschillende lagen, waarbij ze uiteindelijk wel in steeds hogere lagen komen.
Een leerling die volgens het Pirie-Kieran-model een concept beter gaat begrijpen, toont volgens een onderzoek van Warner (2008) een verandering in gedragingen zoals onder andere het gebruik van meerdere representaties, het aan elkaar gaan relateren van representaties en het toepassen van eenzelfde begrip in verschillende contexten. Warner beschrijft de relatie tussen lagen in het Pirie-Kieran-model en geobserveerd gedrag door het werk te analyseren van drie leerlingen die werken aan telproblemen. Het door Warner beschreven gedrag waaruit ‘growth in understanding’ blijkt, sluit aan bij de beschrijving van ‘conceptueel begrijpen’ door Kilpatrick e.a., maar is alleen gevalideerd in een kleinschalige casestudie.

Tall ontwikkelde het model 'cognitive development through three worlds of mathematics' op basis van onderzoek naar het leren van het concept vector (Watson, Spirou & Tall, 2003). In de daaropvolgende jaren breidde hij het model uit naar andere gebieden van de wiskunde, zoals calculus, algebra en meetkunde (Tall, 2004, 2007a, 2007b, 2008). De niveaus in dit model zijn de 'conceptual-embodied world', 'proceptual-symbolic world' en de 'axiomatic-formal world'. Tall beschrijft deze drie werelden als volgt:

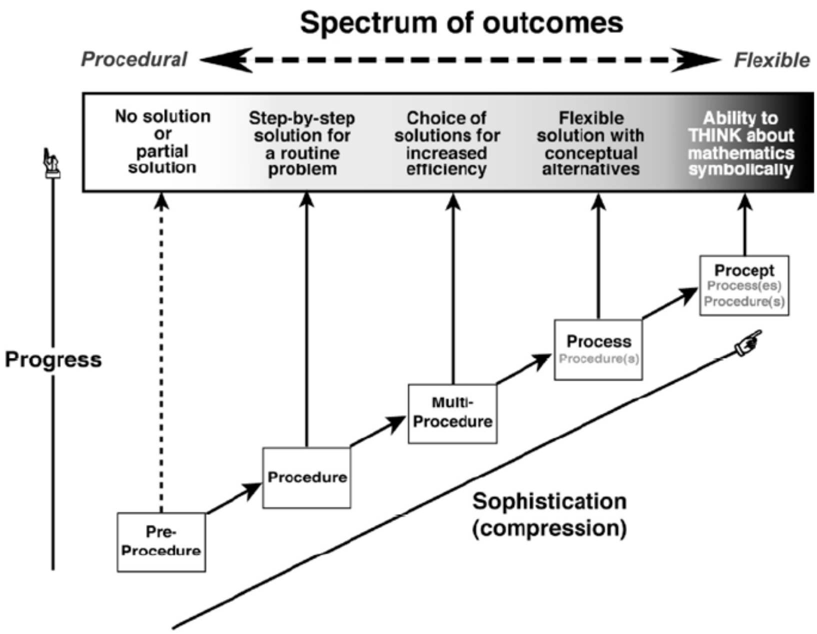
- *the conceptual-embodied world, based on perception of and reflection on properties of objects, initially seen and sensed in the real world but then imagined in the mind;*
- *the proceptual-symbolic world that grows out of the embodied world through action (such as counting) and is symbolised as thinkable concepts (such as number) that function both as processes to do and concepts to think about (procepts);*
- *the axiomatic-formal world (based on formal definitions and proof), which reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known objects to formal concepts based on set-theoretic definitions.* (Tall, 2008, p.7)

Tall ziet de cognitieve ontwikkeling van leerlingen als een stap van de waarneembare 'embodied' wereld, naar de 'proceptual-symbolic' wereld. In die laatste stap rekenen leerlingen met symbolen die zowel een proces- als een objectkarakter kunnen hebben. Tall stelt dat cognitieve ontwikkeling verloopt volgens stappen van de 'conceptual-embodied' naar de 'proceptual-symbolic' wereld en vervolgens naar de 'axiomatic-formal' wereld (Tall, 2007b). Daarnaast concludeert Tall op basis van studies binnen het kader van het model dat individuen een geheel eigen route door deze drie werelden afleggen. Zo kan het gebeuren dat eerst in de 'axiomatic-formal' wereld bepaalde kennis wordt vastgelegd en onthouden die pas later betekenis krijgt in de andere twee werelden.

In de compacte beschrijvingen van Tall worden begrippen die gerelateerd zijn aan de interne kennisstructuur (zie paragraaf 2.2) vermengd met begrippen die gebaseerd zijn op zichtbaar gedrag. Dit maakt het moeilijk de door mij beschreven indicatoren van zichtbaar gedrag te plaatsen in het model van Tall. Voor mijn onderzoek zal ik mijn aandacht richten op die cognitieve ontwikkeling waarin een stap gemaakt wordt van het handelen in de concreet waarneembare wereld naar het werken met symbolen en formules in de symbolische wereld.

Naast de twee modellen voor de ontwikkeling van conceptuele kennis van een concept wordt hieronder ten slotte een model beschreven van Tall (2007a) van de ontwikkeling van procedurele kennis. Tall noemt dit het model van 'toenemende compressie van symbolisering'. Dit leidt tot een derde vorm van compressie naast de twee eerdere vormen die beschreven zijn in paragraaf 2.3.

Figuur 2.3 laat het schematische model van procedurecompressie zien. Volgens Tall beschrijft dit model de compressie van procedures van het stap voor stap uitvoeren van een procedure via het maken van een keuze tussen verschillende procedures naar het zien van het 'overall effect' als algemeen proces. Een procedure kan ten slotte met behulp van symbolen als object worden samengevat. Volgens Tall (2007a) is de verschuiving van de nadruk op het uitvoeren van stappen van een procedure naar het effect van een procedure kenmerkend voor procedurecompressie en het toenemend raffinement ('sophistication') in het gebruik van die procedures.



Figuur 2.3 Procedurecompressie volgen Tall (2008, p.10)

Uit de beschreven modellen blijkt dat de gekozen indicatoren van 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken' (zie paragraaf 2.3 en 2.4) belangrijk zijn voor een analyse van de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid. Warner (2008) brengt de indicatoren voor 'conceptueel begrijpen', zoals 'het op verschillende manieren kunnen representeren van situaties', 'het aan elkaar kunnen relateren van representaties' en 'het herkennen van overeenkomsten tussen - oppervlakkig gezien - verschillende situaties', in verband met de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid. Tall (2007a) noemt de indicatoren voor 'procedureel vloeiend werken' zoals 'de keuze voor een adequate procedure' en 'het flexibel uitvoeren van procedures', als onderdeel van de ontwikkeling in het gebruiken van procedures. De indicatoren van wiskundige bekwaamheid, die ik beschreven heb op basis van het model van Kilpatrick e.a. (2001), lijken daarmee voldoende voor de analyse van de ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden met betrekking tot het concept afgeleide. Een belangrijk verschil tussen de modellen van Pirie-Kirien (1994) en Tall (2008) enerzijds en Kilpatrick e.a. (2001) anderzijds is dat de eerste modellen stadia of niveaus in de ontwikkeling noemen, terwijl dat in het model van Kilpatrick e.a. niet gebeurt. In dat opzicht zijn de eerste modellen meer ontwikkelingsmodellen. In hoofdstuk 8 wordt hierop nader ingegaan.

2.8 Operationalisering van wiskundige bekwaamheid

In dit hoofdstuk beschreef ik middels het model van Kilpatrick e.a. (2001) dat wiskundige bekwaamheid bestaat uit vijf componenten. In het onderzoek zal de nadruk liggen op onderdelen van de eerste twee componenten, ‘conceptueel begrijpen’ en ‘procedureel vloeiend werken’. Voor deze twee componenten zijn indicatoren geïdentificeerd van zichtbaar gedrag waaruit ‘conceptueel begrijpen’ en ‘procedureel vloeiend werken’ blijkt. Deze zijn in tabel 2.1 samengevat.
De componenten van wiskundige bekwaamheid zijn met elkaar verweven. Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid kan plaatsvinden in elk van de componenten en wordt in dit onderzoek geanalyseerd door bij leerlingen na te gaan of in de loop van de tijd een toename zichtbaar is in de verschillende indicatoren van ‘conceptueel begrijpen’ en ‘procedureel vloeiend werken’.
Hoofdstuk 3 bevat de beschrijving van wiskundige bekwaamheid toegespitst op het concept afgeleide. Ook beschrijft dit hoofdstuk hoe deze begrippen in dit onderzoek worden geoperationaliseerd waarbij de nadruk ligt op indicatoren van wiskundige bekwaamheid.

Tabel 2.1 Operationalisering van ‘conceptueel begrijpen’ en ‘procedureel vloeiend werken’

Component	Indicator	Zichtbaar gedrag
Conceptueel begrijpen	Het gemak waarmee leerlingen zich feiten en methoden kunnen herinneren, ze kunnen gebruiken en ze indien nodig kunnen reconstrueren.	• Het gemak waarmee een leerling zich een feit of een methode kan herinneren. • De redenering die een leerling gebruikt om een feit of procedure te reconstrueren.
	Het gebruik van meerdere representaties.	• Het gebruik van meerdere representaties tijdens het werken aan een opdracht. • Het uitleggen van verschillen en overeenkomsten tussen representaties.
	Het benoemen en gebruiken van relaties tussen situaties.	• Het benoemen dat er een relatie is tussen twee situaties. • Het uitleggen welke relatie dat is. • Het gebruik van deze relatie bij het oplossen van een opdracht.
	Het uitpakken van geclusterde kennis.	• Het uitleggen van of reflecteren op verschillende aspecten van een concept. • Aspecten van een concept aan elkaar relateren. • Concepten aan elkaar relateren.
Procedureel vloeiend werken	Het kiezen van een adequate procedure.	• Het kiezen van een procedure die past bij een opdracht en tot een oplossing van de opdracht kan leiden.
	Het aan elkaar relateren van procedures.	• Het kennen van meerdere procedures. • Het uitleggen van overeenkomsten en verschillen tussen twee of meer procedures. • Het beargumenteren waarom voor een procedure gekozen wordt in vergelijking met een andere procedure.
	Het accuraat en efficiënt uitvoeren van procedures.	• Het foutloos en met een zekere snelheid uitvoeren van een procedure.
	Het flexibel uitvoeren van procedures.	• Het gebruiken van meerdere procedures bij een opdracht. • Het switchen naar een adequatere procedure tijdens het maken van een opdracht.

Hoofdstuk 3 Wiskundige bekwaamheid: het concept afgeleide

3.1 Introductie

In hoofdstuk 2 zijn verschillende componenten van wiskundige bekwaamheid besproken. In dit hoofdstuk wordt wiskundige bekwaamheid uitgewerkt voor het concept afgeleide.

In het concept afgeleide zijn verschillende aspecten en relaties tussen aspecten te identificeren. De wiskundige Thurston (1994) stelt dat mensen onderdelen van wiskunde op verschillende manieren begrijpen en illustreert dit met het concept afgeleide:

> *The derivative can be thought of as:*
> *(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.*
> *(2) Symbolic: the derivative of* x^n *is* $n \cdot x^{n-1}$*, the derivative of sin(x) is cos(x), the derivative of* $f \circ g$ *is* $f' \circ g * g'$, etc.
> *(3) Logical:* $f'(x) = d$ *if and only if for every* ε *there is a* δ *such that when* $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$
> *(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent.*
> *(5) Rate: the instantaneous speed of f (t), when t is time.*
> *(6) Approximation: the derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.*
> *(7) Microscopic: the derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.* (Thurston, 1994, p.3)

Het gaat in deze opsomming volgens Thurston niet om verschillende definities van de afgeleide, maar om een overzicht van verschillende voorstellingen van het concept afgeleide. Een wiskundige kan zich het concept afgeleide op verschillende manieren voorstellen en deze voorstellingen aan elkaar relateren. Studenten hebben daar meer moeite mee. Over zichzelf schrijft hij dat het hem veel tijd en inspanning kostte elk van deze zeven aspecten te doorgronden en in overeenstemming te brengen met de andere.
De opsomming van Thurston maakt duidelijk dat het concept afgeleide een veelzijdig begrip is. Ook Zandieh (1997) benadrukt het veelzijdige karakter van het concept afgeleide:

> *For a concept as multifaceted as derivative it is not appropriate to ask simply whether or not a student understands the concept. Rather one should ask for a description of a student's understanding of the concept of derivative - what*

> *aspects of the concept a student knows and the relationships a student sees between these aspects.* (Zandieh, 1997, p. 63)

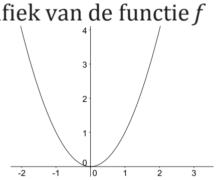
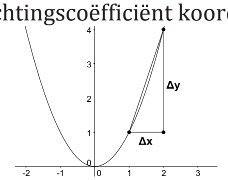
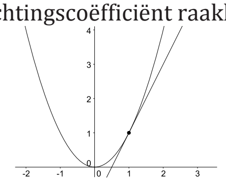
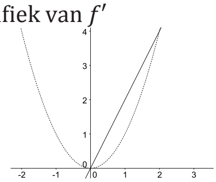
Zowel Thurston als Zandieh spreken dus over aspecten van het concept afgeleide en relaties tussen de verschillende aspecten.
Om deze aspecten overzichtelijk weer te geven is in een eerder stadium van dit onderzoek het *afgeleideschema* ontwikkeld (Roorda, Vos & Goedhart, 2007a, 2007b, 2009). Dit schema omvat naast wiskundige aspecten ook aspecten die gesitueerd zijn in natuurwetenschappen of economie. Het schema wordt beschreven in paragraaf 3.2. De paragrafen 3.3 en 3.4 zijn een uitwerking van de eerste twee componenten van wiskundige bekwaamheid, 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken', voor het concept afgeleide. Paragraaf 3.5 gaat in op de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. In paragraaf 3.6 wordt beschreven hoe het begrip wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide wordt geoperationaliseerd en wordt de onderzoeksvraag nader geoperationaliseerd.

3.2 Het afgeleideschema

In verschillende studies zijn raamwerken ontwikkeld voor het concept afgeleide. In alle raamwerken spelen representaties een belangrijke rol. Daarbij gaat het om de representaties: analytisch/symbolisch, grafisch, numeriek, verbaal, fysisch of kinetisch (Asiala e.a., 1997; Delos Santos, 2006; Hähkiöniemi, 2006; Kendal & Stacey, 2003; Marrongelle, 2004; Tall, 2003; Zandieh, 2000).
Delos Santos (2006) en Kendal en Stacey (2003) kiezen voor de nadruk op de drie representaties: symbolisch, grafisch en numeriek. Deze worden ook wel de 'big three' genoemd (Kaput, 1998). Zandieh (2000) heeft in het door haar gekozen framework geen numerieke representatie opgenomen, maar kiest de representatie 'verbal' voor uitspraken over 'average rate of change' en 'instantaneous rate of change'. Daarnaast voegt zij de fysische representatie toe voor uitspraken van leerlingen over bijvoorbeeld de 'snelheid'. Hähkiöniemi (2006) analyseert in het werk van leerlingen ook het gebruik van gebaren zoals het schetsen van de richting van een grafiek in de lucht of een potlood langs de grafiek leggen als 'raaklijn'. Hähkiöniemi noemt deze gebaren een essentieel onderdeel in het denken van een leerling.

Bij vergelijking van deze studies blijkt de combinatie symbolisch – grafisch in alle raamwerken gehanteerd te worden. Verschil is er in de keuze van de numerieke, de verbale en de natuurkundige representaties en de representatie door middel van gebaren.
In mijn onderzoek richt ik me op het handelen en spreken van leerlingen met betrekking tot drie representaties: de grafische, de symbolische en de

numerieke. Hierin volg ik Delos Santos (2006) en Kendal en Stacey (2003). De keuze voor deze drie representaties is gebaseerd op de centrale rol van deze representaties in bovengenoemde literatuur. Ook in schoolboeken wordt het concept afgeleide vaak vanuit deze drie perspectieven belicht. Daarbij komt in de loop van het vwo de nadruk steeds meer op de symbolische representatie te liggen. Deze drie representaties heb ik weergegeven in het afgeleideschema. Dit schema is gebaseerd op eerdere frameworks voor onderzoek (Kendal & Stacey, 2003; Zandieh, 2000) en curriculumontwerp (Kindt, 1979). In figuur 3.1 wordt eerst een deel van het schema toegelicht. Het hele schema wordt gepresenteerd in figuur 3.2.

<table>
<tr><th></th><th>Symbolisch</th><th>Grafisch</th><th>Numeriek</th></tr>
<tr><td>Laag 1</td><td>De functie $f(x) = x^2$</td><td>Grafiek van de functie f
</td><td>Functiewaarden van f<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Laag 2</td><td>Differentiequotiënt
$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$</td><td>Richtingscoëfficiënt koorde
</td><td>Gemiddelde verandering<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$</td></tr>
<tr><td>Laag 3</td><td>Differentiaalquotiënt
$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$</td><td>Richtingscoëfficiënt raaklijn
</td><td>Momentane verandering<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>1,001</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>1,002001</td></tr></table>$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}002001 - 1}{1{,}001 - 1} \approx 2$</td></tr>
<tr><td>Laag 4</td><td>De afgeleide functie
$f'(x) = 2x$</td><td>Grafiek van f'
</td><td>Functiewaarden van f'<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
</table>

Figuur 3.1 Drie representaties van de afgeleide, gebaseerd op Roorda, Vos en Goedhart (2009)

Figuur 3.1 is een weergave van de drie gekozen wiskundige representaties van het concept afgeleide. Elke representatie is verdeeld in vier lagen. In de symbolische representatie zijn dat: de functie, het differentiequotiënt, het differentiaalquotiënt als limiet van het differentiequotiënt en de afgeleide functie. In navolging van Sfard (1991) noemt Zandieh (1997, 2000) drie proces-objectparen in de lagen 2, 3 en 4 namelijk:

- het delingsproces resulterend in het object 'het differentiequotiënt';
- het limietproces resulterend in het object 'het differentiaalquotiënt';
- het lokaal-globaalproces resulterend in het object 'de afgeleide functie'.

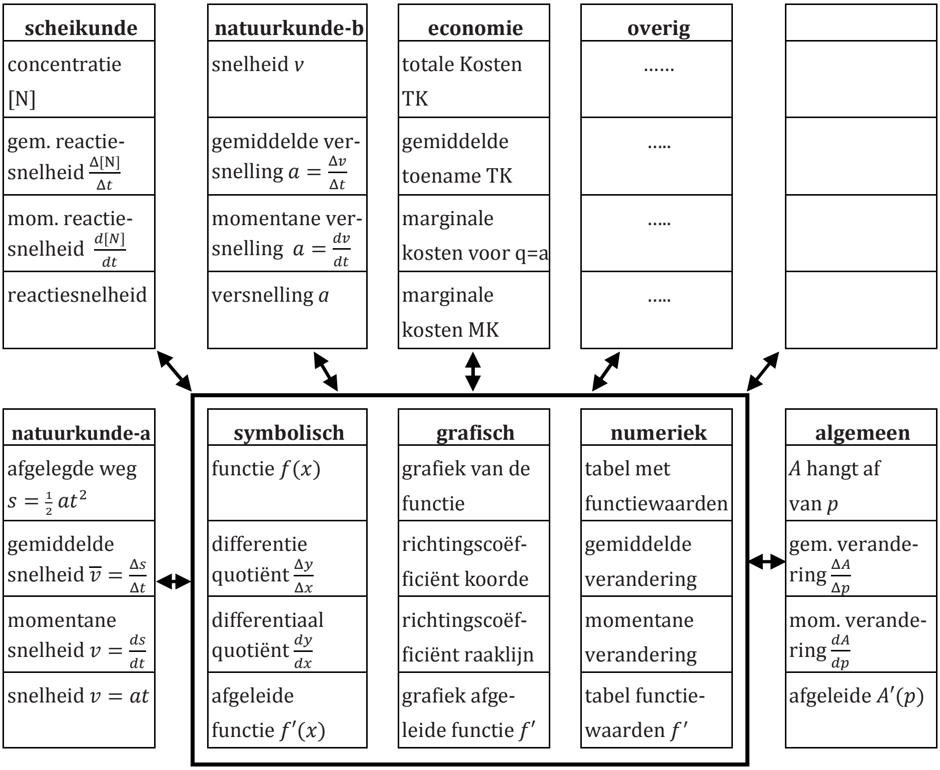
In de grafische representatie en de numerieke representatie zijn vier lagen aan te wijzen die overeenstemmen met de vier lagen van de symbolische representatie. De vier lagen in de grafische representatie zijn: de grafiek, de richtingscoëfficiënt van een koorde, de richtingscoëfficiënt van een raaklijn en de grafiek van de afgeleide functie. De vier lagen in de numerieke representatie zijn: de tabel met functiewaarden, de gemiddelde verandering op een interval, de limiet van de gemiddelde verandering op een krimpend interval en de tabel met afgeleide waarden.

Naast de drie representaties en de vier lagen spelen ook *situaties* een rol in het concept afgeleide. Een situatie is een beschrijving in een opdracht die voor leerlingen voorstelbaar is in de werkelijkheid (zie paragraaf 2.4). Grootheden in situaties hebben een betekenis in de werkelijkheid, zoals afstand, kosten, benzineverbruik of remweg. Bij bepaalde natuurwetenschappelijke en economische begrippen, zoals snelheid, versnelling, radioactief verval en marginale kosten, zijn de vier lagen herkenbaar. Voor het natuurkundige begrip snelheid zijn de lagen bijvoorbeeld:

- Laag 1: de formule $s = \frac{1}{2}at^2$ voor de afgelegde weg gedurende een beweging zonder beginsnelheid, met s de afgelegde weg in meter, t de tijd in seconden en a de versnelling in $\mathrm{m/s^2}$.
- Laag 2: de formule $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ voor de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval.
- Laag 3: de formule $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ op $t = 2$, voor de momentane snelheid op $t = 2$.
- Laag 4: de formule $v = a \cdot t$ voor de snelheid van een voorwerp.

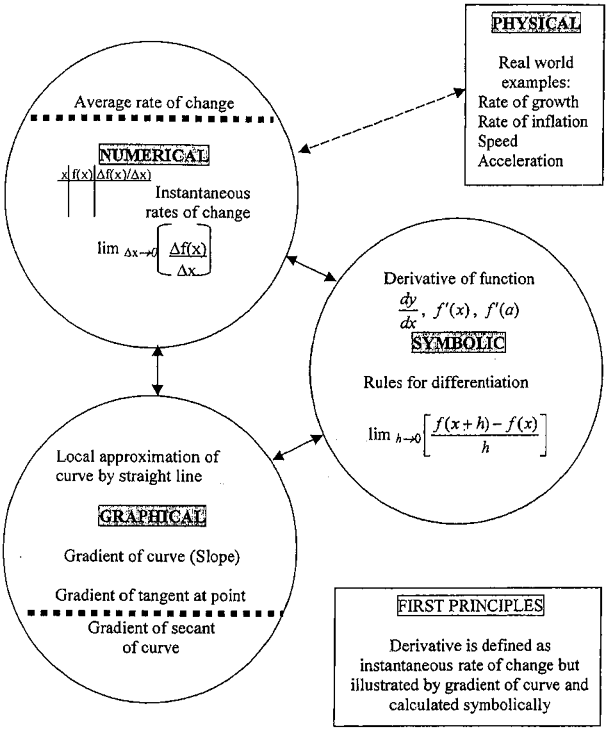
Deze vier lagen van het begrip snelheid hebben parallellen in de grafische en numerieke representatie, zoals een afstand-tijd-tabel (laag-1) of de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan een *s-t* grafiek (laag 3). Ook in andere situaties zijn dezelfde vier lagen te onderscheiden.

In mijn onderzoek beschouw ik de begrippen snelheid, versnelling, marginale kosten en reactiesnelheid als onderdelen van het concept afgeleide en daarom zijn ze opgenomen in het afgeleideschema (zie figuur 3.2). Ze zijn weergegeven rondom de ingekaderde rechthoek als voorbeelden van onderwerpen uit de kinematica (snelheid en versnelling), micro-economie (marginale kosten) en scheikunde (reactiekinetiek) (Den Braber, 2007). De lege kolommen rechtsboven geven aan dat het schema is uit te breiden met andere onderwerpen zoals radioactief verval of populatiegroei. De kolom 'algemeen' geeft aan dat de vier lagen ook in andere situaties kunnen optreden.



Figuur 3.2 Het afgeleideschema, gebaseerd op Roorda, Vos en Goedhart (2009)

De woorden waarmee leerlingen het concept afgeleide interpreteren zal ik aanduiden met *aspecten* van het concept afgeleide. Naast de in het afgeleideschema genoemde aspecten, zoals 'richtingscoëfficiënt', 'snelheid', 'differentiequotiënt' of 'gemiddelde verandering' kunnen ook andere, verwante aspecten door leerlingen gebruikt worden zoals de grafische aspecten 'steilheid' of 'helling' en de numerieke aspecten als 'toename' en 'afname'.
De rol van natuurwetenschappelijke en economische situaties in dit onderzoek lijkt op de benadering van Kendal en Stacey (2003). Zij vatten in een conceptmap van de afgeleide (figuur 3.3) alle situaties uit de 'real world' samen in de categorie 'physical'.
Ze verbinden deze door middel van een stippellijn met de numerieke representatie en verklaren de gestippelde lijn door de 'real world examples' van afgeleiden aan te duiden met 'rates' welke volgens hen het dichtst gerelateerd zijn aan de notie van 'rate of change' in de numerieke representatie. In tegenstelling tot Kendal en Stacey relateer ik deze begrippen niet alleen aan de numerieke representatie maar aan de drie wiskundige representaties. Daarnaast onderscheid ik in de fysische en economische situaties dezelfde vier lagen als in de wiskundige representaties.



Figuur 3.3 Conceptmap van de afgeleide (Kendal & Stacey, 2003, p. 26)

3.3 Conceptueel begrijpen van het concept afgeleide

In hoofdstuk 2 zijn indicatoren van 'conceptueel begrijpen' beschreven in termen van bijbehorend zichtbaar gedrag. Om het onderzoek in te perken worden van de vier indicatoren in deze paragraaf drie uitgewerkt voor het concept afgeleide. Dat zijn de indicatoren: het gebruik van meerdere representaties, het noemen en gebruiken van relaties tussen situaties en het uitpakken van geclusterde kennis. Vooral deze drie indicatoren zijn belangrijk voor het leggen van relaties tussen schoolvakken (zie paragraaf 1.5). De vierde indicator, het gemak waarmee leerlingen zich feiten en methoden kunnen herinneren, gebruiken en reconstrueren, is daar minder op gericht.

3.3.1 Het gebruik van meerdere representaties

Kilpatrick e.a. (2001) beschrijven dat het 'conceptueel begrijpen' verbetert als leerlingen in staat zijn meerdere representaties van een concept te gebruiken en relaties tussen representaties te leggen. Ook in andere onderzoeken staat het gebruik van meerdere representaties centraal bij het leren van het concept afgeleide (Asiala e.a., 1997; Goerdt, 2007; Hauger, 2000; Porzio, 1997; Zandieh,

1997). Hier wordt onderzocht of een curriculum dat gebaseerd is op meerdere representaties tot betere conceptuele kennis leidt.
Zo vergelijkt Porzio (1997) drie groepen universitaire studenten met elkaar die elk op een andere manier een introductie in differentiaalrekening krijgen:

- één groep volgt een cursus waarin werken in de symbolische representatie nadruk krijgt;
- één groep gebruikt bij deze cursus grafische opties van een grafische rekenmachine;
- één groep werkt met de symbolische en grafische opties van een computeralgebrasysteem (CAS).

Porzio concludeert dat conceptuele kennis het meest toeneemt in de CAS-groep waar veel nadruk is gelegd op verbindingen tussen symbolische, grafische en numerieke representaties. De 'grafische-rekenmachinegroep' was vooral goed in het gebruik van grafische representaties, maar de studenten hadden moeite met het leggen van verbindingen tussen grafische en symbolische representaties.
Goerdt (2007) vergelijkt twee groepen eerstejaars studenten tijdens een cursus waarin differentiaalrekening wordt geïntroduceerd. De ene groep volgt een curriculum waarin nadruk gelegd wordt op relaties tussen symbolische, grafische, numerieke en verbale representaties, terwijl de andere groep een meer traditionele opbouw volgt waarin deze representaties wel genoemd worden, maar waarin de nadruk ligt op de symbolische representatie. Op basis van de analyse van het afsluitend examen en interviews met studenten wordt geconcludeerd dat de eerste groep makkelijker switcht tussen representaties dan studenten uit de traditionele cursus.
Omgekeerd blijkt uit sommige studies dat het ontbreken van relaties tussen representaties het 'conceptueel begrijpen' kan hinderen. Habre en Abboud (2006) constateren dat weinig eerstejaars studenten in een introducerende calculuscursus, gericht op studenten in de exacte vakken, grafisch kunnen uitleggen waarom $g(x) = x^2 + 1$ dezelfde afgeleide functie heeft als $f(x) = x^2$. Ferrini-Mundy en Graham (1994) concluderen in hun onderzoek dat eerstejaars studenten die eenzelfde opdracht met verschillende representaties oplossen maar tot verschillende antwoorden komen, zich niet altijd realiseren dat de resultaten tegenstrijdig zijn. Ook blijkt één student die goed in staat is functies symbolisch te differentiëren de relatie tussen een raaklijn en de afgeleide functie niet te kunnen verwoorden. Haciomeroglu, Aspinwall en Presmeg (2010) beschrijven gedetailleerd hoe twee goed presterende eerstejaars wiskundestudenten problemen hebben met het schetsen van een grafiek van een functie op basis van de grafiek van de afgeleide functie. Het lukt hun niet om grafisch en symbolisch denken te combineren in hun redeneringen.

Op basis van het model van Kilpatrick e.a. ga ik ervan uit dat leerlingen die zowel symbolische, grafische als numerieke aspecten van het concept afgeleide kunnen gebruiken en deze aan elkaar kunnen relateren (bijvoorbeeld bij het controleren van oplossingen of het efficiënter uitrekenen van een opdracht) meer conceptueel begrip tonen dan leerlingen die binnen één representatie werken zonder naar andere representaties over te schakelen.

3.3.2 Het noemen en gebruiken van relaties tussen situaties

De persoonlijke constructie van relaties tussen situaties, die oppervlakkig gezien niet gerelateerd zijn, is een onderdeel van wiskundige bekwaamheid (zie paragraaf 2.4). Dit betekent dat een leerling een probleem binnen een situatie oplost door een overeenkomst met een bekende situatie te gebruiken.
Veel studies naar het concept afgeleide zijn gericht op het verkrijgen van inzicht in conceptuele kennis van leerlingen op basis van interviews waarin expliciet gevraagd wordt de betekenis van 'de afgeleide' uit te leggen (Delos Santos, 2006; Hähkiöniemi, 2006; Marrongelle, 2004; Weitendorf, 2007; Zandieh, 1997). Deze studies zijn echter niet gericht op analyse van de betekenis op basis van gebruikte relaties tussen situaties.
In een beperkt aantal studies wordt onderzocht in hoeverre leerlingen overeenkomsten construeren tussen opdrachten die oppervlakkig gezien van elkaar verschillen. Wilhelm en Confrey (2003) rapporteren een studie waarin wordt geanalyseerd in hoeverre leerlingen overeenkomsten tussen twee verschillende 'rate-of-change'-situaties kunnen hanteren. De ene situatie gaat over de toename van geld op een bank. De andere situatie gaat over de toename van afstand in de tijd. Ze beschrijven vier casussen. Twee van de vier leerlingen, die in de ene situatie wel vaardig zijn in het schakelen tussen de grafiek van een hoeveelheid en de grafiek van toenames, gebruiken deze vaardigheid niet in de andere situatie. Wilhelm en Confrey bevelen aan het concept 'rate of change' aan te bieden in meerdere contexten, zodat leerlingen de overeenkomsten tussen oppervlakkig gezien verschillende situaties kunnen zien.
Bassok en Holyoak (1989) onderzoeken in hoeverre leerlingen in staat zijn in de ene situatie geleerde procedures toe te passen in een andere situatie. In alle situaties moeten achtereenvolgende toenames worden opgeteld. Eerst krijgen de leerlingen een training in het oplossen van opdrachten in één bepaalde situatie. Later wordt getest of leerlingen de geleerde strategieën in een andere situatie toepassen. Bassok en Holyoak concluderen dat leerlingen die bepaalde formules en vergelijkingen hadden geleerd in een natuurkundige situatie over het fysische begrip 'versnelling' deze formules niet gebruikten bij economische problemen die op hetzelfde principe gebaseerd waren. Daartegenover stonden leerlingen die deze wiskundige formules en vergelijkingen in de wiskundeles hadden bestudeerd in verschillende, maar niet-economische, contexten. Zij

konden die kennis wèl gebruiken voor het oplossen van economische problemen. Deze studie maakt duidelijk dat de situatie waarin bepaalde kennis is geleerd van invloed is op het construeren van overeenkomsten in een nieuwe situatie.

In verschillende studies wordt ingegaan op de rol van kinematica bij het leren van het concept afgeleide. Zandieh (1997) en Marrongelle (2004) analyseren beiden in hoeverre het ‘snelheidsbegrip’ onderdeel is van het ‘concept image’ van leerlingen van het concept afgeleide.
Zandieh gebruikt de representatie (of context) ‘paradigmatic physical’ om het werk van leerlingen te analyseren. De term ‘paradigmatic’ geeft aan dat één specifieke context of representatie als model voor het hele concept wordt gebruikt. Ze interviewde in haar casestudie negen ‘grade-12’-leerlingen. In de loop van één cursusjaar interviewde ze elke leerling vijf keer. Drie leerlingen blijken in het eerste interview de snelheidscontext vaak te gebruiken om betekenis te geven aan het concept afgeleide. In het laatste interview, aan het eind van de cursus, is de voorkeur van deze drie leerlingen verschoven naar betekenissen van afgeleiden in termen van ‘slope’ en ‘rate of change’. In de studie van Marrongelle (2004) worden verschillen geanalyseerd tussen de manier waarop enkele leerlingen het begrip ‘snelheid’ gebruiken bij het redeneren over het concept afgeleide. Zij onderscheidt leerlingen die geen fysische begrippen gebruiken, leerlingen die wiskundige èn fysische begrippen in hun spreken combineren en leerlingen die in alle redeneringen het concept afgeleide betekenis geven louter in termen van ‘snelheid’. In beide genoemde onderzoeken ligt de nadruk op het oplossen van wiskundige problemen. Daarbij worden de interviews geanalyseerd op het gebruik van natuurkundige begrippen. Het natuurkundige begrip snelheid wordt gezien als representatie of interpretatie van het concept afgeleide. In beide studies worden leerlingen beschreven voor wie het begrip ‘snelheid’ een centrale rol speelt in het betekenis geven aan het concept afgeleide. In de studie van Zandieh speelt in de loop van het studiejaar het begrip snelheid een minder belangrijke rol.

Het construeren van overeenkomsten tussen situaties kan zichtbaar worden wanneer een leerling beredeneert hoe de nieuwe situatie gerelateerd is aan een eerdere situatie. Ook kan zichtbaar worden bij welke aspecten leerlingen het parallelle karakter gebruiken van de verschillende kolommen uit het afgeleideschema (zie figuur 3.2).

3.3.3 Het uitpakken van geclusterde kennis

Door het uitleggen van of het reflecteren op een principe of een concept kan het ‘uitpakken van geclusterde kennis’ zichtbaar worden (zie hoofdstuk 2). In deze paragraaf worden voorbeelden gegeven wat ‘uitpakken van geclusterde

kennis' betekent voor wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide.
In de eerste plaats wordt dit uitpakken zichtbaar als een leerling een laag uit het afgeleideschema kan verklaren in termen van eerdere lagen. Zandieh (1997, 2000) licht dit toe aan de hand van de door Sfard (1991) beschreven proces-objectdualiteit. In het afgeleideschema worden de lagen 2, 3 en 4 door Zandieh als drie proces-objectparen geïdentificeerd. Een proces-objectpaar is hierbij een combinatie van een object met het achterliggende proces. Zandieh komt op basis van analyse van interviews met negen grade-12 leerlingen tot de conclusie dat er geen hiërarchie zit in de lagen: leerlingen blijken objecten op bepaalde lagen te gebruiken zonder deze in termen van voorgaande lagen uit te kunnen leggen.
De door Zandieh beschreven lagen komen ook naar voren in een 'genetische decompositie', een uiteenrafeling tot in details, van het concept afgeleide door Asiala e.a. (1997). In deze genetische decompositie wordt op basis van de APOS-theorie (zie paragraaf 2.4) beschreven op welke manier een student het concept afgeleide kan leren. Asiala e.a. beschrijven een grafische en een analytische route waarin de verschillende lagen benadrukt worden. Ze beargumenteren op basis van interviews met 41 eerstejaars studenten in wiskunde en natuurwetenschappen dat de studenten die een cursus volgden die was gebaseerd op deze route een beter conceptueel begrip van afgeleiden krijgen dan studenten die een traditionele symbolische aanpak zonder grafische ondersteuning volgden.
Eén van de proces-objectparen is het limietproces resulterend in het differentiaalquotiënt. Met name naar het limietproces is veel onderzoek gedaan (Hähkiöniemi, 2005; Oehrtman, 2009; Tall & Vinner, 1991; Tall, 1992; Tsamir, e.a., 2006; Vinner, 1991; Vinner & Dreyfus, 1989). Uit deze onderzoeken blijkt dat leerlingen veel moeite hebben het limietproces en de limietdefinitie van de afgeleide te begrijpen. Dat geldt voor leerlingen die voor het eerst kennismaken met differentiaalrekening, maar ook voor meer ervaren leerlingen. Omdat in mijn onderzoek geen nadruk ligt op het leren van het formeel wiskundig gedefinieerde limietproces ga ik niet verder op deze onderzoeken in.
Het uitpakken van geclusterde kennis kan dus zichtbaar worden als een leerling zowel een bepaald object hanteert als de daarachter liggende processen kan noemen of gebruiken. In mijn onderzoek veronderstel ik dat een beter 'conceptueel begrijpen' zichtbaar is in het beter kunnen uitleggen van een laag uit het afgeleideschema (figuur 3.2) op basis van onderliggende lagen.

Daarnaast wordt het uitpakken van geclusterde kennis zichtbaar als een leerling in een redenering over een bepaald concept relaties kan leggen met andere concepten. Voor het concept afgeleide betekent dit dat de leerling relaties kan leggen tussen de verschillende aspecten van dit concept.

Het aan elkaar kunnen relateren van aspecten van het concept afgeleide wordt ook door Delos Santos (2006) genoemd als onderdeel van conceptuele kennis van de afgeleide. Leerlingen die dit kunnen worden door Delos Santos conceptgeoriënteerde leerlingen genoemd. Dit is één van de vijf categorieën in het door hem ontwikkelde en geteste raamwerk om leerlingen in te delen op basis van hun kennis van het concept afgeleide. Volgens Delos Santos kunnen conceptgeoriënteerde leerlingen aspecten van het concept afgeleide, zoals de afgeleide waarde en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, in verschillende representaties aan elkaar verbinden.

Als aspecten van het concept afgeleide door een leerling op een onjuiste manier gerelateerd worden, kan dit leerlingen hinderen bij het oplossen van opdrachten. Amit en Vinner (1990), Asiala e.a (1997) en Zandieh (2007) beschrijven enkele leerlingen die het berekenen van de afgeleide functie en het opstellen van een formule voor de raaklijn met elkaar verwarren. Zandieh en Knapp (2006) verklaren deze fout uit de waarneming dat de betreffende leerlingen in een interview zeggen dat 'de afgeleide de raaklijn is'. Deze uitspraak is voor de ene leerling een verkorting waar wel een correct conceptueel begrip achter zit, terwijl het voor een andere leerling niet alleen een verkeerde uitspraak is maar ook een onjuist 'conceptueel begrijpen'. Zandieh en Knapp noemen dit verschijnsel een 'metonymic misstatement'. Hierbij wordt een woord op een niet juiste wijze aangeduid door een nauw daarmee verwant woord. In deze onderzoeken wordt dit probleem wel gesignaleerd maar wordt niet beschreven of deze uitspraken in de loop van de tijd bij leerlingen verdwijnen of juist in stand blijven.

Het uitpakken van geclusterde kennis kan dus ook zichtbaar worden in het relateren van verschillende aspecten van het concept afgeleide. In mijn onderzoek operationaliseer ik dit door te analyseren in hoeverre leerlingen het ene aspect uitleggen of interpreteren in termen van andere aspecten.

3.3.4 Samenvatting 'conceptueel begrijpen'

Samengevat, 'conceptueel begrijpen' wordt zichtbaar in het gebruik van meerdere representaties, het noemen en gebruiken van relaties tussen situaties en het uitpakken van geclusterde kennis:

- Het gebruik van meerdere representaties betekent in mijn onderzoek het gebruik van de symbolische, grafische en numerieke representatie en het leggen van relaties tussen deze representaties.
- Het noemen en gebruiken van relaties tussen situaties wordt zichtbaar als leerlingen tijdens het oplossen van een probleem refereren aan eerdere situaties.
- Het uitpakken van geclusterde kennis wordt zichtbaar als leerlingen verschillende aspecten van het concept afgeleide aan elkaar relateren en als leerlingen bij een bepaald object ook de achterliggende processen kunnen noemen of gebruiken.

In dit onderzoek wordt het werk van leerlingen geanalyseerd op basis van een selectie van bovenstaande indicatoren. In paragraaf 3.6 wordt deze selectie beschreven.

3.4 Procedureel vloeiend werken

In hoofdstuk 2 zijn indicatoren van 'procedureel vloeiend werken' beschreven in termen van bijbehorend zichtbaar gedrag. Om het onderzoek in te perken worden van de vier indicatoren in deze paragraaf drie uitgewerkt voor het concept afgeleide. Dat zijn de indicatoren: het kiezen van een adequate procedure, het beschikken over een breed repertoire en het beschikken over een samenhangend repertoire. Vooral deze drie indicatoren zijn belangrijk voor het leggen van relaties tussen schoolvakken (zie paragraaf 1.5). De vierde indicator, het accuraat en efficiënt uitvoeren van procedures, is daar minder op gericht.

3.4.1 Het kiezen van een adequate procedure

In dit onderzoek lossen leerlingen opdrachten op over, bijvoorbeeld, de gemiddelde verandering (laag 2), momentane verandering (laag 3) of de grafiek van de afgeleide functie (laag 4). Op basis van de vier lagen in het afgeleideschema categoriseer ik procedures die te gebruiken zijn voor het oplossen van deze opdrachten. Een procedure om een gemiddelde verandering te berekenen, zoals bijvoorbeeld het aflezen van de helling van een koorde, zal ik aanduiden als een laag 2-procedure. Een voorbeeld van een laag 3-procedure is het aflezen van de richtingscoëfficiënt van een getekende raaklijn. Het berekenen van de afgeleide waarde met behulp van symbolisch differentiëren is een voorbeeld van een laag 4-procedure.
De procedures in tabel 3.1 worden voor een deel bij het schoolvak wiskunde behandeld en voor een deel bij de schoolvakken natuurkunde en economie. Voor enkele procedures zal ik in het vervolg een vaste verkorte uitdrukking gebruiken.
Procedures op één laag zijn sterk aan elkaar gerelateerd. De berekening van bijvoorbeeld de gemiddelde snelheid met de formule $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ hoort bij de laag 2-procedure differentiequotiënt. Een leerling kan de gemiddelde snelheid berekenen door gegeven waarden in te vullen. Maar de leerling kan ook de koordenmethode gebruiken. In laag 4 is het symbolisch differentiëren van de totale kostenfunctie verwant met het berekenen van de marginale kostenfunctie.
Verwante procedures op eenzelfde laag zijn in tabel 3.1 weergegeven als verschillende procedures. Een onderdeel van wiskundige bekwaamheid is het

gebruiken en noemen van overeenkomsten en verschillen tussen verwante procedures.

Tabel 3.1 Procedures gerelateerd aan het afgeleideschema

	Naam van de procedure	Uitvoering van de procedure
Laag 2-procedures	Intervalmethode	Het berekenen van een gemiddelde toename uit een tabel op basis van een deling van twee verschillen.
	Koordenmethode	Het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een koorde.
	Differentiequotiënt	Het berekenen van het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
	Natuurkundeformules	Het berekenen van een gemiddelde snelheid of versnelling met respectievelijk $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ of $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
Laag 3-procedures	Klein-intervalmethode	Het berekenen van een gemiddelde toename op een klein interval.
	Raaklijnmethode	Het tekenen van een raaklijn en aflezen van de richtingscoëfficiënt.
	Rekenmachine-optie 'dy/dx'	Het berekenen van de afgeleide waarde in een punt met de grafische rekenmachine-optie dy/dx.
	Rekenmachine-optie 'tangent'	Het laten tekenen en berekenen van een raaklijn door de grafische rekenmachine.
	Limietdefinitie lokaal	Het berekenen van een differentiaalquotiënt in een punt met een limiet, $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
Laag 4-procedures	Symbolisch differentiëren	Het berekenen van de afgeleide van een functie met een rekenregel.
	Hellinggrafiek	Het tekenen van een 'hellinggrafiek' bij een gegeven grafiek.
	Rekenmachine-optie NDeriv	Het laten plotten van de grafiek van de afgeleide functie met een optie van de grafische rekenmachine.
	Limietdefinitie globaal	Het berekenen van een afgeleide functie met een limiet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
	Marginale kosten berekenen	Het berekenen van de marginale kosten als afgeleide van de totale kosten.
	Natuurkundeformules	Het gebruik van een formule voor de snelheid, zoals $v = gt$

3.4.2 De breedte van het repertoire

Het beschikken over een breed repertoire wordt zichtbaar als een leerling dezelfde opdracht met meerdere procedures kan oplossen. De breedte van het repertoire van leerlingen is weinig onderzocht. Ook is de invloed van onderwijs dat gericht is op het gebruik van meerdere procedures voor het concept afgeleide niet in eerder onderzoek beschreven. Wel noemen Gerson en Walter (2008) het gebruik van meerdere procedures als kenmerk van verbonden kennis van de differentiaalrekening.

Het gebruik van de grafische rekenmachine is een onderdeel van het repertoire dat veel aandacht heeft gekregen. In verschillende studies wordt de invloed van de grafische rekenmachine op de kennis van het concept afgeleide onderzocht (Delos Santos, 2006; Harskamp, Sühre & Van Streun, 1998, 2000; Serhan, 2006, 2009). Het blijkt dat het gebruik van de grafische rekenmachine in het leerproces van het concept afgeleide, in vergelijking met controlegroepen, resulteert in het noemen en gebruiken van meerdere representaties.

In hoeverre het ook leidt tot het gebruik van meerdere procedures is minder beschreven. Harskamp, Sühre en Van Streun (1998, 2000) analyseren wel de gebruikte procedures in diverse probleemsituaties en concluderen dat het gebruik van de grafische rekenmachine leidt tot een uitbreiding van het repertoire bij leerlingen. In de genoemde onderzoeken wordt niet geëxpliciteerd of, en in welke mate, leerlingen als procedure de rekenmachineopties gebruiken, zoals de in tabel 3.1 genoemde optie ‘dy/dx’ of ‘tangent’.

Berry en Graham (2005) en Berry, Graham en Smith (2006) deden onderzoek met software waarmee geregistreerd wordt welke knoppen van de rekenmachine door de leerlingen worden gebruikt. Ze rapporteren dat leerlingen veel kenmerken en opties van de rekenmachine niet gebruiken, hoewel ze al meerdere jaren met de grafische rekenmachine werken. Berry en Graham noemen bijvoorbeeld in algemene zin (dus niet gespecificeerd voor het concept afgeleide) de opties van het CALC-menu (van de TI-rekenmachine). De opties in dit CALC-menu geven de mogelijkheid snijpunten van grafieken, maxima, minima of de afgeleide waarde in een punt door de rekenmachine te laten benaderen.

Verschillende studies (Kendal & Stacey, 2003; Orton, 1983) rapporteren dat een deel van de leerlingen één procedure, namelijk symbolisch differentiëren, wel goed kan toepassen. Deze procedure heeft echter voor veel leerlingen geen relatie met andere aan het concept afgeleide gerelateerde aspecten en procedures.

Orton (1983) onderzocht de kennis van het concept afgeleide van leerlingen aan de hand van een test die onder een groep van 110 leerlingen, variërend van 16 - 22 jaar, werd afgenomen. In deze inmiddels veel geciteerde studie wordt geconstateerd dat de meeste leerlingen (106 van de 110) goed in staat waren de afgeleide functie te berekenen van bijvoorbeeld $y = x^2 - 4x + 1$. Uit andere opdrachten komt naar voren dat een groot deel van de leerlingen weinig conceptueel begrip van de afgeleide had. Van de 106 leerlingen die wel kunnen differentiëren lukt het bij 25 niet een gemiddelde verandering op een interval op basis van een gegeven grafiek te berekenen.

Dat het kunnen berekenen van een afgeleide functie geïsoleerd kan zijn van de raaklijnmethode en de klein-intervalmethode blijkt uit gegevens uit het onderzoek van Kendal en Stacey (2003). Zij ontwikkelden een ‘derivative competency test’ waarmee getest wordt in hoeverre leerlingen vragen over afgeleiden, gesteld in verschillende representaties, kunnen oplossen. In figuur 3.4 zijn drie vragen van deze test weergegeven.

Question 1 [*F*Ss]

Find the derivative of $y = x^5 + 4x^3 - x + 10$

Question 12[*F*Ns]

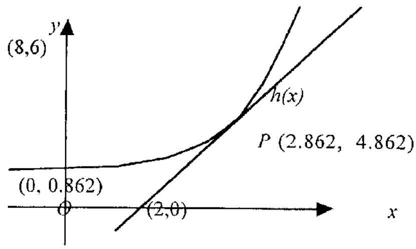
The values of a function close to $x = 5$ are shown in the table below.

x	4.997	4.998	5.000	5.001	5.002
$f(x)$	15.470	15.482	15.500	15.508	15.515

Find the best estimate of the derivative $f'(x)$ at $x = 5$.

Question 10 [*F*Gs]

The graph of the function $h(x)$ is sketched below. The tangent at point P, on the curve $y = h(x)$ has also been drawn. Find the value of the derivative of $h(x)$ at P.



Figuur 3.4 Opdracht 1, 10 en 12 uit het onderzoek van Kendal en Stacey (2003)

Alle 33 leerlingen (grade-11) in dit onderzoek lossen opdracht 1 goed op. Opdracht 10, het berekenen van een afgeleide waarde op basis van een getekende raaklijn, wordt door 17 van de 33 leerlingen goed opgelost, terwijl slechts 10 leerlingen op basis van een tabel een benadering van de afgeleide waarde kunnen berekenen.

Uit deze onderzoeken blijkt dat leerlingen die goed symbolisch kunnen differentiëren slechts voor een deel in staat zijn een grafische of numerieke procedure toe te passen om de afgeleide waarde te berekenen. Leerlingen die beschikken over een breed repertoire kunnen meerdere procedures toepassen. Een breder repertoire is een indicator van een grotere wiskundige bekwaamheid.

3.4.3 Samenhang van het repertoire

Het beschikken over een samenhangend repertoire wordt zichtbaar als leerlingen relaties tussen procedures kunnen noemen. Ook dit onderwerp is voor het concept afgeleide in beperkte mate onderzocht.

Kendal (2001) rapporteert in hoeverre leerlingen symbolische, grafische en numerieke procedures na een calculuscursus aan elkaar relateren. Ze vergelijkt in haar studie twee grade-11 klassen (16-17 jaar) waarvan één klas les krijgt zonder en de andere met een computeralgebrasysteem. Ze concludeert dat leerlingen uit beide klassen vooral verbindingen leggen tussen grafische en symbolische procedures, maar minder tussen grafische en numerieke en tussen symbolische en numerieke procedures.

Het leggen van relaties tussen procedures uit verschillende schoolvakken geeft aan dat er sprake is van een samenhangend repertoire. Het leggen van relaties tussen procedures geleerd bij natuurkunde, economie en wiskunde is nauwelijks beschreven. Roorda, Vos en Goedhart (2007a) beschrijven twee leerlingen uit een pilotstudie, die bij het oplossen van dezelfde opdracht over een vallende kogel verschillende procedures toepassen. De ene leerling David gebruikt de in de wiskundeles geleerde ‘klein-intervalmethode’ en overweegt vervolgens nog het gebruik van een bij natuurkunde geleerde procedure. Hij legt daarmee een relatie tussen procedures geleerd bij verschillende schoolvakken. De andere leerling Mark probeert een bij natuurkunde geleerde formule voor valbeweging te gebruiken en noemt geen andere procedures. De door hem geleerde natuurkundeformules lijken geïsoleerd van andere procedures om een momentane valsnelheid te berekenen.

3.4.4 Samenvatting ‘procedureel vloeiend werken’

Samengevat: ‘procedureel vloeiend werken’ wordt zichtbaar in de keuze voor een adequate procedure, maar ook in de breedte en de samenhang van het repertoire.
Een breed repertoire is zichtbaar in het gebruik van meerdere procedures bij één opdracht. Een samenhangend repertoire betekent het aan elkaar kunnen relateren van verschillende procedures door bijvoorbeeld overeenkomsten en verschillen tussen procedures te noemen. Ook het accuraat en efficiënt uitvoeren van procedures is een indicator voor ‘procedureel vloeiend werken’.
In dit onderzoek wordt het werk van leerlingen geanalyseerd op basis van een selectie van bovenstaande indicatoren. In paragraaf 3.6 wordt deze selectie beschreven.

3.5 De ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide

Er zijn meerdere studies waarin onderzocht is in welke mate een interventie leidt tot een grotere wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. Het gaat daarbij om interventies als: het onderwijs in het gebruik van meerdere representaties (Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Goerdt, 2008; Hähkiöniemi, 2006), het gebruik van de grafische rekenmachine en de symbolische rekenmachine (Delos Santos, 2006; Serhan, 2006; Kendal, 2001), een opbouw van differentiaalrekening in samenhang met kinematica (Doorman, 2005); het inzetten van kinetische ervaringen (Berry & Nyman, 2003). Niet beschreven zijn interventies waarin het schoolvak economie een rol speelt zijn. Hieronder wordt ingegaan op de bevindingen van Doorman en van Berry en Nyman omdat deze betrekking hebben op de raakvlakken van kinematica en wiskunde.

Doorman (2005) onderzocht de wijze waarop leerlingen de beginselen van differentiaalrekening en kinematica leren volgens het principe van ‘geleid

heruitvinden'. Het modelleren van bewegingen voor het doen van voorspellingen vormt de kern van zijn onderwijsexperiment.
Doorman concludeert dat de leerlingen door de gekozen werkwijze kennis ontwikkelen over snelheid als samengestelde grootheid, de samenhang tussen verplaatsingen en afgelegde weg en het differentiequotiënt als maat voor verandering. Deze benadering is er vooral op gericht dat fysische begrippen kunnen wortelen in redeneringen over beweging en voorspellingen bij veranderingsprocessen. De stap naar onderliggende wiskundige structuren van het concept afgeleide blijft voor leerlingen lastig volgens Doorman. Verder zal volgens hem het experiment gevolgd moeten worden door lessenseries waarin de differentiaalrekening naar voren komt als generaliserend principe voor de diverse toepassingen en zal daarnaast de wiskundige structuur van het concept afgeleide behandeld moeten worden.

In meerdere onderzoeken wordt beargumenteerd dat het construeren van een verbinding tussen wiskundige begrippen en persoonlijke kinetische ervaringen bij leerlingen het begrip van het concept afgeleide ondersteunt (Berry & Nyman, 2003; Schorr, 2003; Wright, 2001). Berry en Nyman (2003) beschrijven een experiment waarin universitaire studenten de opdracht kregen de grafiek van een functie te construeren op basis van de grafiek van de afgeleide functie. Ze vatten daartoe de grafiek op als een snelheid-tijd-grafiek. Studenten moesten in een 'loop-activiteit' de snelheid-tijd-grafiek construeren. Met behulp van een datalogger werd de afgelegde weg van een lopende student gemeten en tegelijkertijd werd grafisch de afgelegde weg en de snelheid van de beweging van de student weergegeven. De resultaten van dit experiment tonen aan dat de studenten die aan het begin van deze activiteit het concept afgeleide vooral symbolisch interpreteerden door de 'loop-activiteit' hun begrip van calculus verbreedden naar de grafische representatie.
Dergelijke onderwijsbenaderingen van kinematica en differentiaalrekening staan ver af van de praktijk van het Nederlandse onderwijs. Het onderwerp kinematica wordt momenteel in de schoolboeken van natuurkunde ingeleid met behulp van de grafische representatie. Snel daarna worden formules geïntroduceerd om daarmee opdrachten over snelheid en versnelling te kunnen oplossen. Ook in het wiskundeonderwijs wordt na een introductie met grafieken, tabellen en het begrip snelheid de stap gemaakt naar het symbolisch differentiëren.

In tegenstelling tot de bovengenoemde studies beschrijft de studie van Zandieh (1997, 2000) de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van het concept afgeleide zonder specifieke interventie in het gegeven onderwijs. Zij rapporteert over de ontwikkeling van grade-12-leerlingen gedurende een calculuscursus in één schooljaar (Zandieh, 1997, 2000). Ze vindt verschillen in de ontwikkeling van voorkeurinterpretaties van het concept afgeleide en vindt dat er geen hiërarchie zit in de volgorde waarin aspecten van het concept door leerlingen geleerd worden.

> *As a student's understanding evolves the student may learn one interpretation first and use it to connect to another interpretation. The choice of first interpretation does not seem to be set for all learners but depends on the preferences of the individual student. [...] In summary, any one aspect of the derivative concept may be learned without prior knowledge of the other aspects.* (Zandieh, 1997, p.187)

Naast de verschillen die er zijn tussen leerlingen constateert Zandieh ook dat het begrip van verschillende leerlingen steeds meer overeenkomsten gaat vertonen. Ze verwoordt:

> *As each student develops a more complete understanding, their understanding becomes more similar. In this way, a student's understanding of derivative develops from a partial understanding, each student with a different collection of pieces of the puzzle, to a more complete understanding with perhaps only a few pieces remaining unplaced*. (Zandieh, 2000, p.124)

Zandieh beschrijft de ontwikkeling in relatie tot de gevolgde calculuscursus. Hoewel leerlingen tegelijkertijd ook natuurkundelessen volgen is de inhoud en invloed van deze natuurkundelessen op het begrijpen van het concept afgeleide niet apart onderzocht. Mogelijkerwijs is die invloed wel aanwezig.

In mijn onderzoek kies ik voor een beschrijvend onderzoek zonder interventie in de complexe situatie van verschillende, niet op elkaar afgestemde schoolvakken. In die situatie worden op verschillende momenten en manieren aspecten van het concept afgeleide behandeld.

3.6 Operationalisering van de onderzoeksvraag

De hoofdvraag van dit onderzoek is: *Hoe is in de loop van vwo 4, 5 en 6 de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide?*

In het volgende geef ik een overzicht van de begrippen die in de hoofdvraag aan de orde komen (zie ook bijlage E). Verder zal ik in deze paragraaf de hoofdvraag uitsplitsen in twee operationele deelvragen en zal ik de beperking van het onderzoek aangeven.

Het concept afgeleide is in dit onderzoek breed gedefinieerd en omvat de symbolische, grafische en numerieke representatie en bevat ook gerelateerde onderwerpen uit andere schoolvakken (zie paragraaf 3.2). In het concept afgeleide worden vier lagen onderscheiden die samenvattend kunnen worden aangeduid met functie (laag 1), differentiequotiënt (laag 2), differentiaal-quotiënt (laag 3) en afgeleide functie (laag 4). Het afgeleideschema (figuur 3.4) geeft een overzicht van het geheel aan representaties, lagen en gerelateerde onderwerpen uit andere schoolvakken. De vier grafische cellen in het afgeleideschema vormen samen de grafische representatie, de vier symbolische cellen vormen de symbolische representatie en de vier numerieke cellen de numerieke representatie. De woorden waarmee leerlingen het concept afgeleide interpreteren worden in dit onderzoek aangeduid als *aspecten* van het concept afgeleide. Daarnaast zijn in paragraaf 3.4 procedures genoemd die gekoppeld zijn aan de verschillende lagen. Deze procedures zijn laag 2-, 3- of 4-procedures, naar gelang de procedure correspondeert met één van de vier lagen.

In hoofdstuk 2 is beschreven dat wiskundige bekwaamheid veelomvattend is, bestaande uit vijf componenten. Hoewel al deze componenten belangrijk zijn bij het leren van het concept afgeleide, ligt de nadruk in dit onderzoek op de conceptuele en procedurele component.
Uit de beschrijvingen in paragraaf 2.4, 2.5 en 2.6 blijkt dat de componenten veel overlappende kenmerken bezitten. Een indicator als 'het flexibel gebruik van procedures' bevindt zich op het raakvlak van meerdere componenten. Newton e.a. (2010) zien flexibiliteit als het resultaat van het samengaan van het 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken'. In dit onderzoek volg ik dit standpunt en zal ik in de data-analyse indicatoren zoals beschreven in paragraaf 3.3 en 3.4 analyseren zonder deze expliciet toe te schrijven aan één van de vijf componenten van het model van Kilpatrick e.a..
In dit onderzoek zullen de data niet op basis van alle beschreven indicatoren geanalyseerd worden. Een selectie van indicatoren is gemaakt rekening houdend met het doel van dit onderzoek, namelijk het verkrijgen van inzicht in de mate waarin en de manier waarop leerlingen relaties tussen leerstof uit verschillende schoolvakken zien en gebruiken. Dit kan blijken uit het relateren van procedures die bij verschillende schoolvakken worden behandeld (zie paragraaf 3.4) en uit het relateren van bijvoorbeeld fysische, economische en wiskundige aspecten van het concept afgeleide (zie paragraaf 3.3).
Door deze keuze valt een gedetailleerde analyse van de overgangen tussen representaties, proces-objectparen, de limietdefinitie en het efficiënt toepassen van procedures buiten het bestek van dit onderzoek.

De eerder gestelde hoofdvraag naar de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide wordt op basis van deze keuzes onderverdeeld in twee deelvragen:
Deelvraag 1: *Hoe is de ontwikkeling in de breedte en samenhang van het repertoire?*
Deelvraag 2: *Hoe is de ontwikkeling in het gebruik van representaties en het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide?*

Het gaat in beide deelvragen om de ontwikkeling van leerlingen in de natuurprofielen in de loop van vwo 4, 5 en 6.

In tabel 3.2 worden de twee deelvragen geoperationaliseerd door elke deelvraag te beschrijven in termen van indicatoren. In de toelichting op elke indicator wordt beschreven op welk zichtbaar gedrag de analyses van de data betrekking hebben.
Net als de verwevenheid tussen 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken' is er ook een verwevenheid tussen de indicatoren van beide deelvragen. Een leerling die bijvoorbeeld een grafische, een symbolische en een bij natuurkunde geleerde procedure toepast beschikt over een breed repertoire (indicator 1.2), maar gebruikt daarnaast bij dezelfde opdracht meerdere representaties (indicator 2.1). Iemand die procedures aan elkaar relateert (indicator 1.3) legt ook relaties tussen aspecten uit het afgeleideschema (indicator 2.2).
Ondanks deze verwevenheid van indicatoren is gekozen voor een analyse op de twee deelvragen met bijbehorende indicatoren. In deelvraag 1 worden de gebruikte procedures geanalyseerd. Deelvraag 2 richt zich op uitspraken of toelichtingen van leerlingen, die niet rechtstreeks onderdeel zijn van een procedure. Daarmee onderscheiden beide deelvragen zich van elkaar.

Tabel 3.2 Operationalisering van deelvragen in indicatoren en zichtbaar gedrag

Deelvragen	Indicator	Zichtbaar gedrag
1. Het beschikken over een breed en samenhangend repertoire.	1.1 Het kiezen van een adequate procedure.	Dit wordt zichtbaar als een leerling een procedure kiest die tot een oplossing van de opdracht kan leiden.
	1.2 Het beschikken over een breed repertoire.	Dit wordt zichtbaar als een leerling bij opdrachten meerdere adequate procedures gebruikt of benoemt.
	1.3 Het beschikken over een samenhangend repertoire.	Dit wordt zichtbaar als een leerling verschillen en overeenkomsten tussen procedures kan uitleggen en kan beargumenteren waarom voor een procedure gekozen wordt in vergelijking met een andere procedure.
2. Het gebruik van representaties en noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide.	2.1 Het gebruik van representaties.	Dit wordt zichtbaar in de keuze voor een bepaalde representatie en het gebruik van een bepaalde representatie tijdens het werken aan een opdracht.
	2.2. Het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide.	Dit wordt zichtbaar in het gebruik van en redeneren over aspecten van het concept afgeleide tijdens het werken aan de verschillende opdrachten.

Hoofdstuk 4 Opzet van het onderzoek

4.1 Introductie

Hoe is in de loop van vwo 4, 5 en 6 de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide? Om deze vraag te onderzoeken is gekozen voor een beschrijvende, longitudinale multiple-casestudie aan de hand van opdracht-gebaseerde interviews. In paragraaf 4.2 geef ik argumenten voor de keuze van deze onderzoeksmethode. In paragraaf 4.3 licht ik de keuze van de onderzoeksinstrumenten toe. In paragraaf 4.4 wordt ingegaan op de selectie van deelnemende scholen en leerlingen. Paragraaf 4.5 is een beschrijving van de dataverzameling en tot slot geeft paragraaf 4.6 een overzicht van de werkwijze waarmee de data geanalyseerd worden.

4.2 De onderzoeksmethode

4.2.1 Een beschrijvende multiple-casestudie

In de hoofdstukken 2 en 3 is uiteengezet wat in de literatuur verstaan wordt onder wiskundige bekwaamheid en hoe ik in mijn onderzoek wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide operationaliseer. Wiskundige bekwaamheid is een veelomvattend begrip, waarbij in mijn onderzoek de nadruk ligt op de breedte en de samenhang van het repertoire en het gebruik van representaties en het noemen een aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide. Er bestaan weliswaar modellen voor de ontwikkeling van conceptuele kennis, maar er is nog weinig bekend over de manier waarop de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid plaatsvindt. Om hier inzicht in te krijgen bekijk ik in detail de ontwikkeling van individuele leerlingen. Een gedetailleerde en nauwkeurige bestudering en analyse van individuele leerlingen kan bijdragen aan het begrijpen van deze ontwikkeling. Dit is één reden waarom gekozen is voor een casestudie. Volgens Yin (2003) lenen casestudies zich goed voor het bestuderen van gebieden waarvan weinig bekend is en kunnen ze bijdragen aan het begrijpen van complexe sociale fenomenen.

Deze studie kan daarom gekarakteriseerd worden als een beschrijvende multiple-casestudie. Deze studie bevat ook verklarende en exploratieve elementen (Yin, 2003). Een onderdeel van het onderzoek is namelijk het zoeken naar verklaringen van de geconstateerde ontwikkeling. Daarnaast kunnen uit de gedetailleerde beschrijving van de ontwikkeling aanwijzingen worden afgeleid voor het onderwijs in het concept afgeleide. Dit geeft tevens een exploratieve waarde aan het onderzoek.

In het onderwijs worden bij verschillende schoolvakken concepten en procedures behandeld, waarbij de curricula van de schoolvakken niet op elkaar zijn afgestemd. Dit is de realiteit zoals die zich op veel scholen voordoet. Met een casestudie kan de ontwikkeling van leerlingen in deze complexe context goed worden bestudeerd en geanalyseerd. Een casestudie is namelijk gericht op verschijnselen zoals ze zich van nature voordoen (Denscombe, 2007). Daarbij worden karakteristieken van ‘real life’ behouden (Yin, 2003).
Kortom, de casus is het centrum van de studie en deze wordt bestudeerd in relatie tot de context waarin deze plaatsvindt. De context dient als achtergrond om de beschrijving van de casus op de voorgrond goed te kunnen begrijpen (Miles & Huberman, 1994).

In mijn onderzoek gaat het om de ontwikkeling van leerlingen in de bovenbouw van het vwo. De context verschilt per school en per leerling. Tussen scholen zijn namelijk verschillen in de organisatie van het onderwijs en in de manier van behandelen van het concept afgeleide. Verder hebben leerlingen van één school in de loop van vwo 4, 5 en 6 les van verschillende docenten voor elk van de schoolvakken en volgen ze verschillende profielen en keuzevakken. Om die reden zijn niet één maar meerdere leerlingen gevolgd in deels verschillende en deels dezelfde onderwijscontexten. In dit onderzoek heb ik tien casussen op twee verschillende scholen gekozen om zodoende een breed beeld te krijgen van de ontwikkeling van leerlingen. Met meerdere casussen kunnen overeenkomsten en verschillen tussen casussen geanalyseerd worden (Stake, 1995, 2002; Creswell, 2002).

4.2.2 Een longitudinaal onderzoek

In de loop van vwo 4, 5 en 6 wordt het concept afgeleide geïntroduceerd, herhaald en uitgebreid. Om te kunnen analyseren welke ontwikkeling in deze periode bij leerlingen optreedt, heb ik voor een longitudinale onderzoek gekozen. Longitudinaal onderzoek kan, beter dan cross-sectioneel, de ontwikkeling in de loop van de tijd zichtbaar maken (Davies, 2006; Singer & Willett, 2003).
In mijn longitudinale onderzoek heb ik wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide op opeenvolgende tijdstippen gemeten. Daardoor kan het proces van verandering zichtbaar worden gemaakt (Singer & Willett, 2003). Per leerling heb ik op vier tijdstippen gemeten. Dit ritme van data verzamelen sloot aan bij de opbouw van het onderwijs in de differentiaalrekening.

De eerste dataverzameling heeft plaatsgevonden voor de introductie van de differentiaalrekening bij wiskunde. De tweede dataverzameling was enkele weken nadat de eerste hoofdstukken over de differentiaalrekening bij wiskunde waren afgerond. De derde afname viel na een periode waarin aspecten van de differentiaalrekening, zoals differentieerregels en het bepalen van extremen en formules van raaklijnen, opnieuw aandacht hadden gekregen. De vierde en laatste dataverzameling viel nadat de behandeling van de differentiaalrekening bij wiskunde in het vwo was afgerond. Tabel 4.1 laat zien dat zo een halfjaarlijks ritme van data verzamelen ontstaat.

Tabel 4.1 Momenten van data verzamelen

	Interview 1	Interview 2	Interview 3	Interview 4
Datum	april 2006	november 2006	mei 2007	november 2007
Klas	vwo 4	vwo 5	vwo 5	vwo 6

Betekenisloos geleerde procedures of oppervlakkig gememoriseerde aspecten blijken drie of vier weken na een toets minder goed beschikbaar te zijn (Kruteskii, 1976; Skemp, 1987). Daarom zijn de metingen drie à vier weken na een proefwerkweek gepland en niet kort ervoor of erna. Zo kan voorkomen worden dat leerlingen handelen vanuit betekenisloos uit het hoofd geleerde procedures en wordt beter zichtbaar welke procedures en aspecten van het concept afgeleide onderdeel zijn van het 'conceptueel begrijpen' van de leerling.
Het doel van elke meting is inzicht te geven in de wiskundige bekwaamheid van de leerling op dat moment. Om de metingen goed met elkaar te kunnen vergelijken zou telkens gekozen moeten worden voor het inzetten van hetzelfde meetinstrument (Singer en Willett, 2003). Dit was in mijn onderzoek moeilijk te implementeren. Zo moet de eerste meting van wiskundige bekwaamheid, die voor de introductie van de differentiaalrekening wordt afgenomen, passen bij de kennis die op dat moment beschikbaar is. Ook kan het gebruik van vier keer hetzelfde instrument de resultaten gaan beïnvloeden. Er is daarom gekozen voor een systeem waarin per meting deels dezelfde en deels andere elementen onderdeel zijn van het instrument. Dit wordt toegelicht in paragraaf 4.5.

4.3 Methoden van dataverzameling

De nadruk in mijn onderzoek ligt op het hebben van een breed en samenhangend repertoire en het gebruik van representaties en aspecten van het concept afgeleide. Door leerlingen opdrachten te laten maken die aanleiding geven tot deze aandachtspunten wordt wiskundige bekwaamheid zichtbaar. Alleen een schriftelijke toets is daarvoor niet een voldoende

instrument omdat daarmee uitspraken en handelingen niet goed zichtbaar worden. Daarom is gekozen voor opdracht-gebaseerde interviews (zie 4.3.1).
Voorafgaand aan het onderzoek zijn pilotinterviews afgenomen. Daaruit is gebleken dat uitspraken en handelingen van leerlingen bij de gebruikte opdrachten inzicht geven in hun wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide (zie 4.3.2).
Daarnaast zijn data verzameld om de onderwijscontext te beschrijven. Tijdens de interviewsessies is het opdracht-gebaseerde deel afgewisseld met interviews naar achtergrondkenmerken van de leerlingen. Ook zijn interviews met hun docenten afgenomen en zijn documenten geanalyseerd (zie 4.3.3). Daarnaast is de behandelde leerstof bij de verschillende schoolvakken geanalyseerd.

4.3.1 Opdracht-gebaseerde interviews

Een opdracht-gebaseerd interview is een interviewtechniek waarbij twee actoren betrokken zijn: de persoon die de opdracht oplost en de interviewer. De interactie tussen beiden vindt plaats aan de hand van opdrachten die door de interviewer via een vooraf geplande werkwijze worden gepresenteerd (Goldin, 2000).
Volgens Goldin kunnen opdracht-gebaseerde interviews dienen om het leren van wiskunde systematisch te observeren en de kennis van een leerling te beschrijven. Ginsburg (1981, 1997) zet uiteen dat klinische opdracht-gebaseerde interviews geschikt zijn voor psychologisch onderzoek, omdat met deze methode cognitieve structuren en denkprocessen te ontdekken en te identificeren zijn. Koichu en Harel (2007) formuleren:

> *There is overwhelming evidence that clinical task-based interviews open a window into the subjects' knowledge, problem-solving behaviors, and reasoning (e.g. Newell & Simon, 1973; Schoenfeld, 1985, 2002).* (p.349)

Bij het ontwerpen van de opdracht-gebaseerde interviews heb ik gebruik gemaakt van de door Goldin (2000) geformuleerde principes. Deze principes zijn vooral gericht op mogelijke repliceerbaarheid van het onderzoek (zie ook Clement, 2000). Belangrijk daarbij is het gebruik van interviewscripts, met daarin taken, hints en vervolgvragen. In paragraaf 4.5 wordt beschreven hoe deze principes in dit onderzoek zijn geoperationaliseerd.
Bij de interviews was mijn rol die van 'klinisch' onderzoeker. Leerlingen kregen geen feedback op de kwaliteit van hun werk tijdens en na de eerste drie interviews. Pas na het laatste interview is teruggeblikt op de voorgaande interviews. Door gericht vragen te stellen (zie paragraaf 4.5) en antwoorden te spiegelen stimuleerde ik leerlingen tot zoveel mogelijk uitspraken en handelingen die inzicht konden geven in wiskundige bekwaamheid.
Het was mijn doel tijdens de interviews een sfeer te creëren die niet bedreigend was. Ik benadrukte daarom dat ik hun werk niet beoordeelde,

maar dat ik inzicht probeerde te krijgen in hun kennis van bepaalde aspecten van de exacte vakken. Ik presenteerde mezelf als onderzoeker van de faculteit wiskunde en natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen die onderzoek doet naar het leren van onderdelen van de exacte vakken. De interviews vonden plaats op school, in een neutrale ruimte, zoals een studieruimte of spreekkamer, en niet in een economie-, natuurkunde- of wiskundelokaal.

4.3.2 Pilotinterviews

De opdrachten zijn vooraf getest in pilotinterviews. Allereerst zijn negen havo-5 leerlingen geïnterviewd (zie Roorda e.a., 2007a). Daarna hebben in het jaar voorafgaande aan het onderzoek twee vwo 4-, twee vwo 5- en twee vwo 6-leerlingen deelgenomen aan opdracht-gebaseerde interviews. Deze interviews bestonden voor een gedeelte uit het oplossen van opdrachten. In deze pilotinterviews is getest of de gekozen opdrachten bruikbaar waren voor het genoemde doel en of ze zowel in klas vwo 4, 5 als 6 gebruikt konden worden.
In de eerste plaats is onderzocht of opdrachten aanleiding gaven tot het gebruik van meerdere procedures, zowel procedures uit wiskunde als uit natuurkunde en economie. In Roorda e.a. (2007a) is te zien hoe twee leerlingen aan de hand van dezelfde opdracht tot geheel verschillende procedures komen om deze opdracht op te lossen.
In de tweede plaats is nagegaan of de opdrachten aanleiding gaven tot het redeneren over het concept afgeleide op basis van verschillende representaties. In Roorda, Den Braber en Vos (2008) en Vos en Roorda (2007) worden resultaten beschreven van een dergelijke redeneeropdracht die zowel bij leerlingen als docenten tot een variatie aan uitspraken over het concept afgeleide leidt. In de pilotinterviews bleken bepaalde opdrachten aanleiding te geven tot het gebruik van meerdere procedures en stimuleerden andere opdrachten leerlingen vooral tot het redeneren over het concept afgeleide.
In de derde plaats is nagegaan of bepaalde opdrachten zowel voor leerlingen in vwo 4, 5 als 6 op te lossen waren. Opdrachten waarin bijvoorbeeld een momentane verandering gevraagd werd, bevatten naast de formule ook een grafiek of tabel. Op deze manier konden zowel vwo 4-leerlingen die nog geen introductie in de differentiaalrekening hadden gehad, als vwo 5- en 6-leerlingen een dergelijke opdracht oplossen.

De pilotinterviews leidden tot een overzicht van geschikte opdrachten om wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide te meten. Enkele opdrachten zijn naar aanleiding van de pilotinterviews aangepast. In paragraaf 4.5 wordt aan de hand van voorbeeldopdrachten de invloed van de pilotinterviews op de uiteindelijke formulering van de opdrachten beschreven.

4.3.3 Methoden voor het verzamelen van contextdata

Naast de opdracht-gebaseerde interviews zijn aanvullende data verzameld met als doel de context van het onderzoek in kaart te brengen. Deze data worden gebruikt om de onderwijscontext te beschrijven (zie hoofdstuk 5) en om verklaringen te geven voor de geconstateerde ontwikkeling.

Document- en schoolboekanalyse

Er is een analyse gemaakt van studiewijzers en schoolboeken van wiskunde, natuurkunde en economie. Deze analyse geeft een overzicht over de leerstof van de verschillende vakken in de periode van het onderzoek. De schoolboeken van natuurkunde en economie zijn eerder geanalyseerd in een flankerend onderzoek door Den Braber (2007).

Daarnaast zijn aantekeningen van leerlingen verzameld. In eerste instantie werden van alle geselecteerde leerlingen schriften verzameld. De aantekeningen en uitwerkingen in deze schriften geven een indruk van de behandelde leerstof, de uitleg van een docent en de uitgewerkte opdrachten. In de praktijk bleek dat enkele leerlingen hun schriften niet af wilden staan, anderen schreven onduidelijk of hadden ongeordende schriften. Van twee leerlingen, die opvielen door hun nette handschrift en hun overzichtelijke werkwijze, Fleur van school A en Otto van school B, zijn alle wiskunde- en natuurkundeschriften met aantekeningen en uitwerkingen verzameld.

Aan de hand van schoolboeken, studiewijzers en schriften is zo geanalyseerd welke procedures en aspecten van het concept afgeleide zijn onderwezen. Ook werd uit de studiewijzers en de schriften duidelijk in hoeverre bij wiskunde opdrachten worden gegeven die gerelateerd zijn aan economie en natuurkunde.

Interviews

Voor het verzamelen van contextdata zijn interviews afgenomen met docenten en met de leerlingen (naast de opdracht-gebaseerde interviews). De wiskundedocenten van de onderzochte leerlingen zijn aan het begin van het onderzoek en aan het einde van het onderzoek geïnterviewd. Interview I vond aan het begin van het onderzoek plaats (zie bijlage A). De bedoeling van dit interview was de leerlingen gespreid naar niveau en studiehouding te selecteren, leerlingen te kunnen karakteriseren en tevens data te verzamelen over de mate van afstemming tussen de schoolvakken wiskunde, natuurkunde en economie. Interview II vond aan het einde van het onderzoek plaats (zie bijlage A). Met dit interview is aanvullende informatie over de leerlingen en de onderwijscontext verzameld.

In een flankerend onderzoek zijn docenten van andere vakken geïnterviewd om inzicht te krijgen in hun onderwijs met betrekking tot het concept afgeleide (Vos e.a., 2010). Daarin is beschreven hoe docenten van natuurkunde, economie en scheikunde procedures en aspecten van het concept afgeleide in

hun lessen behandelen. In mijn onderzoek maak ik gebruik van gegevens uit dit onderzoek waarvan sommige niet in Vos e.a. (2010) gerapporteerd zijn.
Een interview met een leerling bestond uit een opdracht-gebaseerd deel en een contextdeel. De vragen in het contextdeel concentreerden zich rond drie onderwerpen: de prestaties bij de exacte vakken, het gebruik van de grafische rekenmachine en de studiehouding van de leerling. Aan het einde van de vierde interviewsessie is met de leerling teruggekeken op de opdrachten. De interviewvragen ten behoeve van de onderwijscontext staan in bijlage B.

4.3.4 Overzicht van de onderzoeksmethoden

In mijn onderzoek zijn data verzameld om leerlingen te selecteren, de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid te meten, leerlingen te karakteriseren en de onderwijscontext te beschrijven. Tabel 4.2 geeft een overzicht van de gebruikte onderzoeksmethoden en hun doel.

Tabel 4.2 Gebruikte onderzoeksmethoden en hun doel

onderzoeksmethoden	*doel*
Pilotinterviews met leerlingen in havo 5 en vwo 4, 5 en 6	• testen of opdrachten inzicht geven in wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide • vaststellen of formuleringen van opdrachten moeten worden bijgesteld
Halfjaarlijkse interviews met leerlingen bestaande uit: • opdracht-gebaseerde deel (bijlage C) • contextdeel (bijlage B)	• meten van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide • karakteriseren leerling • beschrijven onderwijscontext
Startinterview met wiskundedocenten vwo 4 (bijlage A)	• selecteren leerlingen voor deelname aan het onderzoek • karakteriseren leerlingen • beschrijven onderwijscontext
Afsluitend interview met wiskunde-docenten vwo 6 (bijlage A)	• karakteriseren leerlingen • beschrijven onderwijscontext
Interviews met natuurkunde- en economiedocenten (zie Vos e.a., 2010)	• beschrijven onderwijscontext
Documentanalyse (aantekeningen leerlingen, studiewijzers) en schoolboekanalyse	• beschrijven onderwijscontext

4.4 Deelnemende scholen, docenten en leerlingen

4.4.1 Selectie van scholen

Bij de start van een langjarige studie is het van belang dat er een stabiele en continue onderzoeksrelatie met de scholen kan ontstaan. Ook een goede samenwerking met een contactpersoon van de school is van belang om contacten met leerlingen en docenten van de verschillende schoolvakken te leggen. Deze criteria hebben geleid tot de selectie van twee scholen. Het is in dit onderzoek niet de bedoeling bepaalde onderwijsvarianten met elkaar te vergelijken. De scholen zijn dus niet geselecteerd op basis van hun onderwijskundige visie of het gebruik van een bepaalde didactiek.

School A is een protestants christelijke scholengemeenschap. In één gebouw zijn zowel vmbo, havo als vwo gevestigd. De school telt circa 1300 leerlingen. School B is een grote openbare scholengemeenschap met meerdere vestigingen. De onderzochte leerlingen van school B zitten allen op dezelfde vestiging, met ongeveer 1500 leerlingen in de eerste en tweede fase van het vwo en havo.

Het tijdstip waarop leerlingen kiezen voor een profiel in de tweede fase is een voor dit onderzoek relevant verschil tussen de scholen. Op school B hebben alle leerlingen in vwo 4 hetzelfde pakket en wordt de keuze voor een profiel na vwo 4 definitief gemaakt. In vwo 4 worden de vakken biologie, natuurkunde en scheikunde niet gegeven, terwijl wel alle leerlingen economie krijgen. Ondanks de identieke lesstof zijn deze klassen niet heterogeen ingedeeld. Er zijn natuur-klassen en maatschappij-klassen. In de natuur-klassen wordt bij wiskunde soms meer leerstof behandeld of krijgen de leerlingen een aantal lastiger opdrachten. Op school A is de keuze voor een natuur- of maatschappijprofiel al gemaakt aan het begin van vwo 4. Leerlingen hebben naast de verplichte vwo 4-vakken alleen de vakken uit hun profiel en daarnaast één keuzevak.

4.4.2 Selectie van leerlingen

Belangrijk in dit onderzoek zijn de relaties die leerlingen leggen tussen natuurkundige, economische en wiskundige procedures en aspecten van het concept afgeleide. De onderzochte leerlingen zijn geselecteerd uit de profielen Natuur en Gezondheid of Natuur en Techniek. Alle geselecteerde leerlingen volgden in elk geval wiskunde-B1 en natuurkunde-1. De leerlingen uit het profiel Natuur en Techniek volgden bovendien wiskunde-B2 en natuurkunde-2 (zie paragraaf 1.2). Enkele leerlingen volgden economie als keuzevak.

Voor de selectie van deelnemende leerlingen heb ik op beide scholen interview I (zie bijlage A) gehouden met de vwo 4-wiskundedocenten uit de natuur-profielen/'natuur-klas'. Ik heb hen gevraagd leerlingen te noemen waarvan ze inschatten dat ze aan mijn onderzoek willen meewerken. Ik heb op basis van deze informatie per school zes leerlingen geselecteerd. Daarbij zijn de volgende selectiecriteria gebruikt:

- Evenveel jongens als meisjes per school.
- De leerlingen zijn verdeeld over verschillende niveaus: goed, gemiddeld, zwak. Deze niveau-inschatting is door de wiskundedocent gedaan.
- Het moet redelijk zeker zijn dat de leerling overgaat naar vwo 5 en een natuurprofiel kiest.

Door het laatste criterium zijn er meer ‘goede’ en ‘gemiddelde’ dan ‘zwakke’ leerlingen in de onderzoeksgroep opgenomen. De leerlingen zijn per brief uitgenodigd deel te nemen aan het onderzoek. Alle uitgenodigde leerlingen hebben ingestemd.
Omdat bij twee leerlingen videodata ontbreken, wordt gerapporteerd over tien leerlingen. Voor de leerlingen zijn gefingeerde namen gebruikt. Op school A: Andy, Bob, Casper, Dorien en Elly. Op school B: Karin, Maaike, Nico, Otto en Piet. De twee leerlingen over wie niet wordt gerapporteerd zijn Fleur en Lianne. In hoofdstuk 6 worden per leerling kenmerken en achtergronden beschreven.

4.4.3 De docenten

De leerlingen in dit onderzoek hebben les gehad van verschillende docenten voor wiskunde, natuurkunde en economie. Op het moment van selectie in vwo 4 was niet bekend welke docenten de leerlingen zouden hebben in vwo 5 en vwo 6. De docenten worden in dit onderzoek aangegeven met een letter. Tabel 4.3 geeft een overzicht van de verdeling van de docenten over de verschillende vakken. Op school B heeft wiskundedocent C tijdens ‘begeleidingsuren’ vragen van leerlingen beantwoord. De wiskundedocenten D en H zijn tijdens een ziekteperiode van docent B van de herfstvakantie tot de kerstvakantie in 2006 ingevallen.
De centrale onderzoeksvraag betreft de ontwikkeling van een leerling en niet de invloed van de docent op deze ontwikkeling. Tabel 4.4 geeft per leerling het overzicht van de docenten voor wiskunde, natuurkunde, scheikunde en economie in vwo 4, 5 en 6. Dit maakt het mogelijk leerlingen te vergelijken die in de periode van het onderzoek steeds les hebben gehad van dezelfde docenten.

Tabel 4.3 Docenten wiskunde, natuurkunde en economie op de scholen

	School A	**School B**
wiskunde	Docenten: P en Q	Docenten: A en B Bijles en invallessen: C, D en H
natuurkunde	Docenten: R, S en T	Docenten: F en G
economie	Docenten: U en V	Docent: K

De streepjes in tabel 4.4 geven aan dat een leerling in het betreffende jaar een bepaald vak niet in zijn pakket had. In deze tabel is te zien dat Bob en Dorien voor wiskunde en natuurkunde gedurende de drie onderzochte schooljaren dezelfde docenten hadden maar een verschillend profiel (Bob deed Natuur en Techniek, Dorien Natuur en Gezondheid). Ook Casper en Elly hadden dezelfde docenten en een verschillend profiel. Karin en Maaike hadden in het profiel Natuur en Gezondheid voor de profielvakken dezelfde docenten maar een verschillend keuzevak. Ook Nico, Otto en Piet hadden in het profiel Natuur en Techniek voor wiskunde en natuurkunde dezelfde docenten.

Tabel 4.4 Leerlingen, hun vakken en docenten

School	Leerling	Profiel vakken+ vrije keuze	Wiskunde vwo 4,5,6	natuurkunde vwo 4,5,6	economie vwo 4,5,6
A	Andy	wib12, na12, sk12, ak	P,P,P	R,R,R	–,–,–
	Bob	wib12, na12, sk12,ec	Q,P,P	T,R,R	U,U,U
	Casper	wib12, na12, sk12, ec	P,Q,P	R,S,S	V,U,U
	Dorien	wib1, na1, sk1, na2	Q,P,P	T,R,R	–,–,–
	Elly	wib1, na1, sk1, ec	P,Q,P	R,S,S	V,U,U
B	Karin	wib1, na1, sk1, gs	A,B,B	–,G,G	K,–,–
	Maaike	wib1, na1, sk1,spa	A,B,B	–,G,G	K,–,–
	Nico	wib12, na12, sk12, ak, ec	A,B,B	–,F,F	K,K,K
	Otto	wib12, na12, sk12, bio	A,B,B	–,F,F	K,–,–
	Piet	wib12, na12, sk12, bio	A,B,B	–,F,F	K,–,–

4.5 Instrumenten voor het meten van wiskundige bekwaamheid

Wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide heb ik onderzocht met opdrachten in opdracht-gebaseerde interviews. In deze paragraaf worden eerst ontwerpprincipes voor de gebruikte opdrachten beschreven (4.5.1). Vervolgens wordt de werkwijze tijdens een opdracht-gebaseerd interview uitgelegd (4.5.2) en worden enkele opdrachten toegelicht (4.5.3). Ten slotte wordt de samenstelling van opdrachten per interview beschreven (4.5.4).

4.5.1 Ontwerpprincipes van opdrachten

De opdrachten en de methode van interviewen zijn zo ontworpen dat uitspraken en handelingen van leerlingen veel informatie kunnen verschaffen over de beide deelvragen van het onderzoek. Daarvoor zijn zowel berekenopdrachten als redeneeropdrachten opgenomen.
Berekenopdrachten kunnen aanleiding geven tot het gebruik van verschillende procedures. Daarnaast kunnen ze inzicht geven in de door leerlingen gebruikte

representaties en de met elkaar gerelateerde aspecten. *Redeneeropdrachten* kunnen leiden tot uitspraken over representaties en aspecten van het concept afgeleide.
Voor de opdrachten zijn principes gehanteerd die deels gebaseerd zijn op de ontwerpprincipes van Goldin (2000) voor opdracht-gebaseerde interviews:

1. Een opdracht betreft een situatie waarbij vaak meerdere representaties, zoals een formule, een grafiek of een tabel, een rol spelen. Dit biedt leerlingen de mogelijkheid verschillende representaties te gebruiken en aan elkaar te relateren. Dit sluit aan bij het advies van Goldin opdrachten te kiezen die rijk zijn aan representaties (Goldin, 2000).
2. Een opdracht moet toegankelijk zijn voor een leerling (Goldin, 2000). Hiermee wordt bedoeld dat wiskundige procedures en aspecten in de opdracht passen bij de kennis van de geïnterviewde.
3. In een opdracht wordt een situatie beschreven waarbij de grootheden in de situatie een betekenis hebben in de werkelijkheid, zoals afstand, kosten, benzineverbruik of remweg.
4. Berekenopdrachten kunnen worden opgelost met verschillende in tabel 3.1 gepresenteerde procedures. Enkele van de berekenopdrachten kunnen worden opgelost met procedures die behandeld zijn bij natuurkunde of economie.
5. Redeneeropdrachten moeten aanleiding kunnen geven tot redeneringen waarin aspecten van het concept afgeleide genoemd worden.
6. In de interviewvragen wordt het expliciete gebruik van het woord ‘afgeleide’ vermeden. Elke opdracht heeft betrekking op het concept afgeleide, maar aan de leerlingen wordt niet bekend gemaakt dat dit de verbindende schakel is tussen de opdrachten. Hierin wijkt mijn onderzoek af van eerdere onderzoeken (Bingolbali, Monaghan & Roper, 2008; Delos Santos, 2006; Hähkioniemi, 2006; Zandieh, 2000). In sommige opdrachten wordt leerlingen wel gevraagd een notatie zoals $R'(80)$ en $TK'(20)$ in een beschreven situatie te interpreteren. Deze opdrachten zijn aan het eind van een interview opgenomen om te voorkomen dat het zien van het accent-teken van de afgeleide functie de uitwerking van andere opdrachten zou beïnvloeden.

De bovengenoemde principes hebben geresulteerd in de tien opdrachten: *Watertanks*, *Kogel*, *Benzine*, *Remweg, Monopolie*, *Kosten*, *Tikkerband*, *Steen*, *VT-diagram* en *Ballon* (zie paragraaf 4.5.3 en bijlage C). Deze opdrachten spelen in dit onderzoek een belangrijke rol omdat ze leerlingen aanzetten tot het tonen van hun repertoire en tot het redeneren over aspecten van het concept afgeleide.

4.5.2 De werkwijze tijdens een interview

De werkwijze tijdens het opdracht-gebaseerde deel van het interview was erop gericht inzicht te krijgen in de wiskundige bekwaamheid van leerlingen. De gekozen werkwijze is gebaseerd op door Goldin (2000) beschreven principes:

- ontwikkel expliciet beschreven protocollen;
- stimuleer leerlingen in het oplossen van een opdracht;
- maximaliseer interactie met de omgeving;
- wees alert op onvoorziene mogelijkheden.

Om inzicht te krijgen in de breedte van het repertoire zijn vooraf de volgende vervolgvragen geformuleerd:

- Na het oplossen van een opdracht krijgt de leerling één van de volgende vragen voorgelegd:
  - ken je nog een andere manier om deze opdracht op te lossen?
  - zou je je antwoord nog op een andere manier kunnen controleren?
- Deze vervolgvragen zijn per opdracht maximaal twee keer gesteld.
- Kan een leerling de opdracht niet oplossen of loopt hij vast in een procedure dan wordt gevraagd of hij nog een ander idee heeft om de opdracht op te lossen en of hij het antwoord ook kan schatten.
- Bij het gebruiken van twee of meer verschillende procedures waarbij de antwoorden verschillen, wordt gevraagd welke van deze antwoorden goed zou zijn.

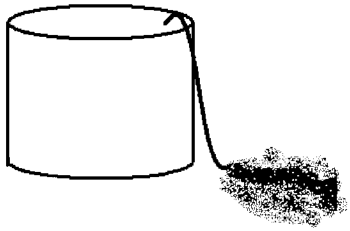
Alle leerlingen maakten tijdens een interviewronde dezelfde opdrachten, in dezelfde volgorde. Vanaf interview 2 had de interviewer vooraf vastgesteld hoe lang een leerling ongeveer aan een opdracht kon werken (zie bijlage B). Tijdens een interview is zowel gebruik gemaakt van *gelijktijdig* verbaliseren (hardop-denken) als *terugblikkend* verbaliseren (Ericsson & Simon, 1980). Belangrijk daarbij is volgens Ericsson en Simon dat de interviewer geen nieuwe informatie inbrengt tijdens het interview. Daarom is ervoor gekozen objectief in te gaan op uitspraken van leerlingen en vervolgvragen expliciet te koppelen aan aspecten die een leerling al genoemd had.
De interviews zijn op video opgenomen waarbij ook de gebaren van leerlingen te zien zijn. Bijvoorbeeld als een leerling naar de grafiek, de formule of de tabel wijst is daaraan te zien welke representatie de leerling in zijn oplossing betrekt. Omdat het niet mogelijk was de rekenmachinebewerkingen van een leerling op te nemen vanuit dit camerastandpunt, zijn deze door de interviewer apart genoteerd.

4.5.3 Voorbeeldopdrachten met toelichting

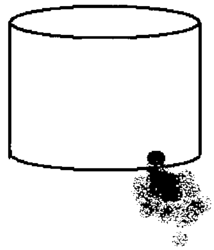
Om de uitwerking van de ontwerpprincipes en de werkwijze tijdens het opdracht-gebaseerde interview duidelijk te maken worden in deze paragraaf drie berekenopdrachten en twee redeneeropdrachten weergegeven en toegelicht. Andere gebruikte opdrachten staan in bijlage C.

Watertanks

In figuur 4.1 staat de tekst van de berekenopdracht *Watertanks*.



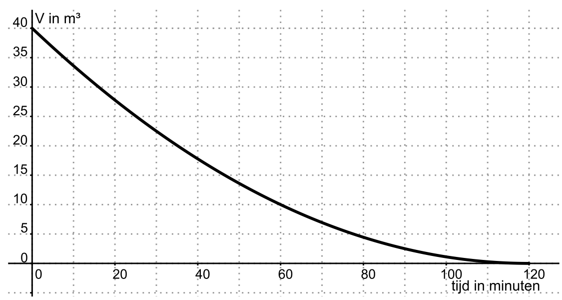
figuur 1: Tank leegpompen



figuur 2: Tank leeg laten lopen

Een grote tank wordt leeggepompt (zie figuur 1). De tank heeft een inhoud van 40 m³, dat is 40.000 liter. Voor het volume van het water in de tank geldt de formule $V = 40 - \frac{1}{3}t$.
Hierin is V het volume in m³, en t de tijd in minuten.
a. Met welke snelheid (liter/minuut) wordt deze tank (figuur 1) leeggemaakt?

Een andere manier om deze tank leeg te maken is door aan de onderkant van de tank een opening te maken (figuur 2). Met behulp van de wet van Torriceli kun je een formule afleiden voor de hoeveelheid vloeistof in de tank.
De snelheid van leeglopen hangt namelijk af van de hoeveelheid water die op een bepaald moment nog aanwezig is in de tank. Als er minder water in de tank zit is de waterdruk bij de opening ook lager. Een passende formule bij deze tank is: $V = 10(2 - \frac{1}{60}t)^2$.
Hierin is V het volume van het water in de tank in m³ en t de tijd in minuten.
In figuur 3 zie je de grafiek waarin V is uitgezet tegen t.



Figuur 3: grafiek van het leeglopen van een tank waar onderin een gat is gemaakt

b. Met welke snelheid (liter/minuut) stroomt de tank leeg op t = 40 minuten?
c. Beide tanks (figuur 1 en figuur 2) zijn na 2 uur leeg. Onderzoek op welk moment de uitstroomsnelheid in beide tanks gelijk is.

Figuur 4.1. De opdracht *Watertanks*

In de opdracht *Watertanks* worden twee manieren vergeleken om een grote watertank te legen. In de onderdelen worden vragen gesteld over de snelheid waarmee het water uit de tank stroomt. Onderdeel a is bedoeld als instapopgave omdat dit onderdeel is op te lossen met kennis van lineaire formules die in vwo 2 en 3 is behandeld. In onderdeel b worden zowel de formule als de grafiek van de tweede leeglopende watertank gegeven. Er wordt gevraagd naar de momentane uitstroomsnelheid op t = 40. In onderdeel c wordt gevraagd naar het tijdstip waarop de uitstroomsnelheid in beide tanks gelijk is.
Mogelijke procedures voor de aanpak van onderdeel b zijn:

- *intervalmethode*: op het interval [40, 41] kan met de formule berekend worden dat de afname van het volume 442 liter is. De uitstroomsnelheid is bij benadering 442 liter per minuut.
- *klein-intervalmethode*: van t = 40 tot t = 40,001 kan met de formule berekend worden dat het volume met 0,000444 m^3 afneemt in 0,001 minuut, dat is 444 liter per minuut.
- *koordenmethode*: tussen twee punten van de grafiek, bijvoorbeeld bij t = 35 en t = 45, kan worden afgelezen dat het volume afneemt van 20 naar 15 kubieke meter. Een afname van 5 m^3 per 10 minuten, dus ongeveer 500 liter per minuut.
- *raaklijnmethode*: na het tekenen van een raaklijn in de grafiek kan de richtingscoëfficiënt $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{35}{80} = 0{,}4375$ worden afgelezen. Dus ongeveer 440 liter per minuut.
- *rekenmachine-optie dy/dx*: na het invoeren van de formule Y1= 10(2 – 1/60X)^2 in de rekenmachine kan met de optie dy/dx berekend worden: dy/dx ≈ -0,444 dus de uitstroomsnelheid is ongeveer 444 liter per minuut.
- *rekenmachine-optie Tangent:* na het invoeren van de formule Y1= 10(2 – 1/60X)^2 kan met de optie 'Tangent' de formule van de raaklijn berekend worden, namelijk Y = -0,44444444X+35,555555. De richtingscoëfficiënt is ongeveer -0,444 dus de uitstroomsnelheid is -0,444 m^3 per minuut, dat is 444 liter per minuut.
- *symbolisch differentiëren*: via differentiëren $V'(t) = 20\left(2 - \frac{1}{60}t\right) \cdot -\frac{1}{60} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{180}t$ kan berekend worden dat $V'(40) = -\frac{4}{9}$. Er stroomt ongeveer 0,444 m^3 per minuut uit, dus de uitstroomsnelheid is 444 liter per minuut.

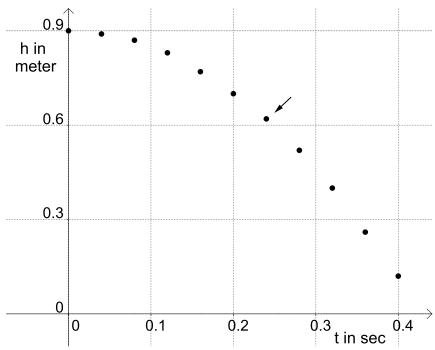
In pilotinterviews (Roorda e.a., 2007a, 2007b) bleek het onderdeel *Watertanks-b* bij meerdere leerlingen aanleiding te geven tot het gebruiken van diverse van bovenstaande procedures. Ook bleek dat het differentiëren van de functie veel fouten opleverde. Dit bleek leerlingen soms te stimuleren verschillende procedures te gebruiken om het gevonden antwoord te controleren. Deze opdracht bleek daarmee geschikt om inzicht te krijgen in de breedte en de samenhang van het repertoire en in voorkeur voor bepaalde representaties.

Kogel

In figuur 4.2 staat de tekst van de berekenopdracht *Kogel*.

Bij een practicum voor natuurkunde laten twee leerlingen een kogel van een hoogte van 90 cm vallen. Ze gebruiken een opstelling waardoor er geen wrijving optreedt. Tijdens de val maken ze een stroboscopische foto van de kogel. De stroboscoop geeft 25 flitsen per seconde. De leerlingen hebben hun metingen eerst in een tabel, en vervolgens in een grafiek weergegeven. Je ziet de tabel en de grafiek hieronder.

tijd (sec)	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40
hoogte (cm)	90	89	87	83	77	70	62	52	40	26	12



De leerlingen hebben ontdekt dat de grafiek een deel van een parabool is. Daarom is het hun gelukt om een formule op te stellen voor de *hoogte* (m) van de kogel afhankelijk van de *tijd* (sec), namelijk $h(t) = 0{,}9 - 4{,}9t^2$. Bij één van de punten staat een pijl. In het practicumverslag beschrijven de leerlingen hoe ze op dat moment de snelheid van de kogel kunnen berekenen.
Hoe kunnen ze die snelheid berekenen?

Figuur 4.2 De opdracht *Kogel*

In deze opdracht is een situatie beschreven, passend bij het onderdeel kinematica van het vak natuurkunde (zie Middelink e.a., 1998). Ook in de schoolboeken van wiskunde staan opdrachten over de valbeweging waarbij een snelheid berekend moet worden op basis van een gegeven formule voor de hoogte. De gekozen context van het natuurkundepracticum, een stroboscopische foto en de metingen door leerlingen, situeert de opdracht dichterbij natuurkunde.

Mogelijke procedures zijn:

- *intervalmethode*: in de tabel kan afgelezen worden dat op t = 0,24 de hoogte 62 cm is en op t = 0,28 is de hoogte 52 cm. De snelheid is ongeveer 0,1 / 0,04 = 2,5 m/s.

- *klein-intervalmethode*: met de gegeven formule kan berekend worden dat van t = 0,24 tot t = 0,241 de hoogte met 0,002401 meter af neemt. Dat is ongeveer 2,4 m/s.
- *koordenmethode*: uit de grafiek kan afgelezen worden dat de hoogte van de kogel van t = 0,24 tot t = 0,28 met ongeveer 0,1 meter afneemt. Dat is ongeveer 2,5 m/s.
- *raaklijnmethode*: na het tekenen van een raaklijn in het punt met $t = 0,24$ kan de richtingscoëfficiënt worden afgelezen. Deze is ongeveer –2,4. De snelheid is dus ongeveer 2,4 m/s.
- *rekenmachine-optie dy/dx*: na het invoeren van de formule Y1 = 0,9 – 4,9X^2 kan met de optie dy/dx berekend worden: dy/dx = -2.352. De gevraagde snelheid is ongeveer 2,35 m/s.
- *rekenmachine-optie Tangent*: na het invoeren van Y1 = 0,9 – 4,9X^2 kan met de optie 'Tangent' berekend worden dat de formule van de raaklijn Y = -2,352X+1,18224 is. De snelheid is dus ongeveer 2,35 m/s.
- *symbolisch differentiëren*: met de afgeleide functie $h'(t) = -9{,}8t$ kan berekend worden dat $h'(0{,}24) = -9{,}8 \times 0{,}24 \approx -2{,}4$. De gevraagde snelheid is ongeveer 2,4 m/s.
- *natuurkundeformule valsnelheid*: met de formule $v = g \cdot t$ kan de snelheid berekend worden. De snelheid is $v = g \cdot t = 9{,}8 \cdot 0{,}24 \approx 2{,}4$ m/s.
- *natuurkundeformules energie*: met de natuurkundeformules voor potentiële en kinetische energie kan de snelheid berekend worden. $E_z = E_k + E_z \rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot\ v^2 + m \cdot g \cdot h$.
  Dit levert $9{,}8 \cdot 0{,}9 = \frac{1}{2}v^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}62$ dus v = 2,4 m/s.

In pilotinterviews (Roorda e.a., 2007a, 2009) bleek dat sommige leerlingen alleen met natuurkundeformules de snelheid berekenden, terwijl anderen een antwoord vonden met symbolisch differentiëren of met de raaklijnmethode. Omdat zowel de tabel, de grafiek en de formule gegeven zijn, werden verschillende procedures gebruikt. Naar aanleiding van de pilotinterviews is de vraagstelling in de opdracht gewijzigd van 'Bereken de snelheid' naar 'Hoe kunnen ze die snelheid berekenen?'. Deze vraagstelling stimuleert de leerling meerdere procedures te noemen. Tevens is een vervolgvraag naar de snelheid waarmee de kogel de grond raakt geschrapt omdat deze weinig extra informatie verschafte over het repertoire van leerlingen.

Monopolie

In figuur 4.3 staat de berekenopdracht *Monopolie*. Deze opdracht heeft raakvlakken met opdrachten uit de micro-economie waar berekeningen worden gemaakt met kosten- en opbrengstenfuncties en het begrip monopoliepositie wordt behandeld. In economische termen wordt hier gevraagd naar de productieomvang als de marginale kosten minimaal zijn (onderdeel a) en voor welke productie de marginale kosten en opbrengsten gelijk zijn (onderdeel b). De vraagstelling is zo geformuleerd dat ook leerlingen die geen economie volgen de opdracht kunnen maken. Door de grafiek te plotten kunnen leerlingen zich een goed beeld vormen van de situatie. Uit de plot is globaal af te lezen waar de toename van TK minimaal is. Om deze waarde precies te berekenen kunnen leerlingen verschillende procedures gebruiken.

> Wanneer een firma de alleenverkoop (het monopolie) bezit van een bepaald product, dan moeten alle consumenten bij die ene firma kopen. Als het product volgens de consumenten te duur wordt, dan neemt het aantal verkochte eenheden van dat product af.
> Een bedrijf produceert een bepaald product. Door een marktonderzoek is vastgesteld dat voor het verband tussen de prijs en de verkochte hoeveelheid geldt $p = -0{,}5q + 12$, hierin is q het aantal verkochte eenheden in duizendtallen en p de prijs in euro per stuk. Voor de totale opbrengst in duizenden euro's geldt dan $TO = -0{,}5q^2 + 12q$.
>
> Als het bedrijf meer produceert zullen de kosten voor de productie ook toenemen. Het wiskundig model dat het bedrijf voor de totale kosten heeft opgesteld is $TK = 0{,}03q^3 - 0{,}5q^2 + 4q + 15$. Hierin is q in duizendtallen en TK in duizenden euro's.
> a. Als het bedrijf meer gaat produceren is er geen constante toename van de totale kosten. Bij welke productieomvang is de toename van de totale kosten het laagst?
> b. Onderzoek bij welke productie de kosten en de opbrengst even snel toenemen.

Figuur 4.3 De opdracht *Monopolie*

Mogelijke procedures bij onderdeel a zijn:

- *intervalmethode*: in een tabel met beginwaarde q = 5 en stapgrootte 0,1 kan worden afgelezen dat de toename minimaal is tussen q = 5,5 en q = 5,6. De toename van de kosten is het laagst bij een productie van ongeveer 5500 producten.
- *rekenmachine-optie dy/dx*: na het invoeren en plotten van de grafiek van Y1 = 0,03X^3 – 0,5X^2 + 4X + 15 kan bij verschillende waarden van q de helling van de grafiek berekend worden met de rekenmachine-optie dy/dx. De waarde van dy/dx is minimaal voor q = 5,6, dus ongeveer 5600 producten.
- *symbolisch differentiëren*: met de tweede afgeleide, $TK''(q) = 0{,}18q - 1$, kan berekend worden waar de grafiek overgaat van afnemende stijging naar toenemende stijging. $TK''(q) = 0$ voor q = 5,555. Aangezien de tweede afgeleide overgaat van negatief naar positief is de toename van de kosten het laagst bij een productie van ongeveer 5600 producten.
- *symbolisch differentiëren en hellinggrafiek*: na het berekenen van de afgeleide $TK'(q) = 0{,}09q^2 - q + 4$ en het plotten van de bijbehorende grafiek, kan worden afgelezen waar de toename van de totale kosten het laagst is. De grafiek van TK' heeft een minimum bij q = 5,555. De toename van de kosten is het laagst bij een productie van ongeveer 5600 producten.

Voor onderdeel b zijn ook meerdere procedures mogelijk. In pilotinterviews bleken bij dit onderdeel meerdere procedures gebruikt te worden, zoals de rekenmachine-optie dy/dx of symbolisch differentiëren (Roorda e.a., 2007a). Ook leerlingen die geen economie hadden, konden bij deze opdracht zinvolle berekeningen maken. In de pilotstudie gaf deze opdracht bij een enkele leerling aanleiding tot het leggen van relaties tussen wiskundige representaties en economische aspecten als marginale kosten en opbrengsten.

Remweg

In figuur 4.4 is de redeneeropdracht *Remweg* weergegeven. Deze opdracht is ontleend aan een studie naar het begrip van 'rate of change' onder eerstejaars studenten van een universiteit (Bezuidenhout, 1998). In de door Bezuidenhout beschreven antwoorden blijkt dat deze opdracht aanleiding geeft tot redeneringen waarin diverse aspecten van het concept afgeleide naar voren komen.

De remweg $R(v)$ van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen. Deze remweg R in meter, is een functie van de snelheid v in km/u.
Ga er van uit dat de maximumsnelheid van een auto 200 km/uur is.
Wat betekenen de volgende formules in termen van remweg en snelheid?

a) $R(100) = 80$
b) $R'(80) = 1{,}15$
c) $R''(v) > 0$

Figuur 4.4 De opdracht *Remweg*

De opdracht gaf in een pilotstudie aanleiding tot rijke data waarin leerlingen al redenerend de betekenis van $R'(80)$ probeerden te construeren (zie ook Roorda e.a., 2008; Vos & Roorda, 2007). In de pilotstudie bleek dat leerlingen, die onderdeel b moeilijk vinden, onderdeel c ook niet kunnen interpreteren. In de interviews is er daarom voor gekozen leerlingen alleen aan onderdeel c te laten beginnen als bij onderdeel b een enigszins betekenisvolle interpretatie was gegeven.

Benzine

In figuur 4.5 staat de redeneeropdracht *Benzine*. Deze opdracht is ontleend aan een onderzoek van Kaiser-Messmer (1986). In haar onderzoek wordt deze opdracht gebruikt om inzicht te krijgen in de bekwaamheid van studenten om een differentiequotiënt en een differentiaalquotiënt te interpreteren in een situatie. De onderzoekster beschrijft dat sommige leerlingen de opdracht interpreteren in termen van gemiddeld verbruik of het verbruik op één punt, maar dat anderen refereren aan de afgeleide functie en het limietproces en andere aspecten van het concept afgeleide.

De opdracht kan inzicht geven in de keuze voor een representatie en aanleiding geven tot uitspraken over verschillende aspecten van het concept afgeleide. Redeneringen kunnen gaan over de situatie, dus over het gemiddelde verbruik over een traject van h kilometer, maar ook over het differentiequotiënt, de richtingscoëfficiënt van een koorde of de verandering van het

verbruik op een klein interval. Daarnaast kunnen relaties gelegd worden met het limietproces, de afgeleide waarde en differentiëren.
Om leerlingen te stimuleren in hun redeneringen zijn in mijn onderzoek aanvullende vragen gesteld. Een van de aanvullende vragen betrof de invloed van de grootte van *h* op de betekenis van de formule. Daarmee kon deze vraag aanleiding geven tot een redenering over het limietproces als aspect van het concept afgeleide. Als een leerling geheel in termen van de situatie bleef redeneren is afsluitend de vraag gesteld of hij de formule eerder gezien had. Hiermee kon duidelijk worden of leerlingen de formule herkenden als onderdeel van het concept afgeleide. Omdat de opdracht is overgenomen uit het onderzoek van Kaiser-Messmer (1986) is deze niet in een pilotinterview getest.

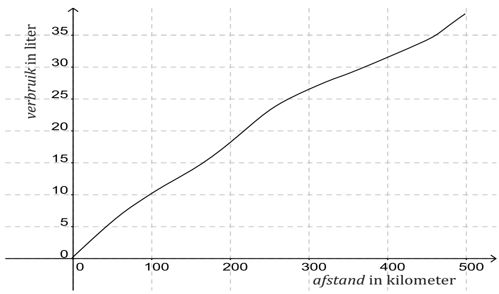
In een auto is een meetsysteem aangebracht, waarmee elke 10 kilometer, gemeten wordt hoeveel benzine de auto heeft verbruikt. Tijdens een rit van 500 kilometer zijn de metingen genoteerd.
In de tabel zie je enkele metingen die tijdens deze rit zijn gemaakt.

De gereden afstand is a (in km) en de hoeveelheid verbruikte benzine is V (in liter)

a(km)	10	20	30	50	100	200	300	400	500
V (liter)	1,3	2,7	4,0	6,4	10,3	18,3	26,6	31,2	39,7

$V(a)$ is het verbruik na a km.

Alle metingen zijn in een grafiek gezet en daarna is een vloeiende grafiek getrokken door de punten.



Wat betekent in deze situatie $\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$? (In deze formule is h een waarde die je zelf mag kiezen.)

Figuur 4.5 De opdracht *Benzine*

De vijf hierboven beschreven opdrachten illustreren dat de opdrachten geschikt zijn om inzicht te geven in de wiskundige bekwaamheid van een leerling met betrekking tot het concept afgeleide.

4.5.4 Combineren van opdrachten per interview

Bij het samenstellen van combinaties van opdrachten per interview is uitgegaan van de volgende criteria:

1. De opdrachten in interview 1 kunnen worden opgelost zonder kennis van symbolisch differentiëren.
2. Elk interview bevat een opdracht over een situatie die niet specifiek aan één schoolvak is gekoppeld, bijvoorbeeld de opdrachten *Watertanks*, *Remweg* en *Benzine*.
3. Elk interview bevat een opdracht over een situatie waarin de tijd de onafhankelijke variabele is en de afgelegde weg de afhankelijke variabele (*Kogel*, *Tikkerband*). Deze opdrachten kunnen worden opgelost met procedures die zowel bij wiskunde als bij natuurkunde zijn behandeld.
4. Elk interview bevat een opdracht over een economische situatie (*Monopolie*, *Kosten*).
5. Vanaf interview 2 bevat elk interview één of twee *redeneeropdrachten* en drie of vier *berekenopdrachten*.
6. Per interview betreft één opdracht een snelheid-tijd-grafiek (*Ballon*, *Steen*, *VT-diagram*).
7. De opdrachten worden gespreid herhaald in vervolginterviews (zie ook paragraaf 4.2).

Deze criteria hebben geresulteerd in een verdeling van de opdrachten over de vier interviews (zie tabel 4.5). Om de resultaten van interviews goed te kunnen vergelijken zijn in de interviews 2 en 4 vijf gemeenschappelijke opdrachten opgenomen. Zeven van de tien opdrachten zijn twee of meer keren herhaald. Omdat interview 4 te lang dreigde te worden is in dit interview van criterium 6 afgeweken (zie tabel 4.5). Drie opdrachten over *v-t* grafieken, namelijk *Steen*, *Ballon* en *VT-diagram*, zijn dus maar één keer in een interview opgenomen.

Tabel 4.5 Verdeling van de opdrachten per interview

	I–1 april 2006	I–2 nov. 2006	I–3 april 2007	I–4 nov. 2007
1. Watertanks	X	X	X	X
2. Tikkerband	X		X	
3. Kogel		X		X
4. Monopolie	X	X		X
5. Kosten			X	
6. Remweg		X		X
7. Benzine		X	X	X
8. Steen	X			
9. Ballon		X		
10. VT-diagram			X	

4.6 Data-analyse

De opdracht-gebaseerde interviews leveren data op met betrekking tot de wiskundige bekwaamheid van de geïnterviewde leerlingen. De analysemethode van deze data is gebaseerd op een model voor het analyseren van videodata van Powell, Francisco en Maher (2003). In dat model worden de volgende zeven stappen onderscheiden: "*(1) Viewing attentively the video data; (2) Describing the video data; (3) Identifying critical events; (4) Transcribing; (5) Coding; (6) Constructing a storyline; (7) Composing narrative*" (Powell e.a., 2003, p.413).

Powell e.a. (2003) zien deze stappen niet als een vaste, onveranderlijke volgorde die bij videoanalyses gebruikt moet worden. Daarnaast kunnen bepaalde analysefases meer of minder nadruk krijgen. In mijn onderzoek lag de nadruk op de stappen 4, 5, 6 en 7.

Het transcriberen vond plaats in twee rondes. Eerst zijn alleen de gesproken woorden getranscribeerd. Vervolgens zijn in een tweede ronde deze transcripties aangevuld met beschrijvingen van gebaren van leerlingen, berekeningen op de rekenmachine en uitgeschreven uitwerkingen. Na deze twee transcriptierondes zijn de gebruikte procedures, representaties en de genoemde aspecten van het concept afgeleide gecodeerd en zijn de indicatoren voor wiskundige bekwaamheid geanalyseerd.

Van de vijf indicatoren voor wiskundige bekwaamheid (zie tabel 3.2) zijn er drie gericht op de eerste deelvraag van het onderzoek. Dit zijn de volgende indicatoren:

1.1 Het kiezen van een adequate procedure

1.2 De breedte van het repertoire

1.3 De samenhang van het repertoire

De twee overige indicatoren betreffen de tweede deelvraag van het onderzoek over representaties en aspecten van het concept afgeleide:

2.1 Het gebruik van representaties (symbolisch, grafisch, numeriek)

2.2 Het noemen van aspecten van het concept afgeleide

4.6.1 Breedte en samenhang van het repertoire

De indicatoren 1.1 en 1.2 zijn geanalyseerd door bij elke opdracht te coderen welke procedures door een leerling zijn gebruikt. Uit de analyses van de interviews met tien leerlingen bleek dat tien procedures door de leerlingen gebruikt zijn in de verschillende situaties. Deze zijn weergegeven in tabel 4.6.

Bij elk van de opdrachten wordt met een code aangegeven of:

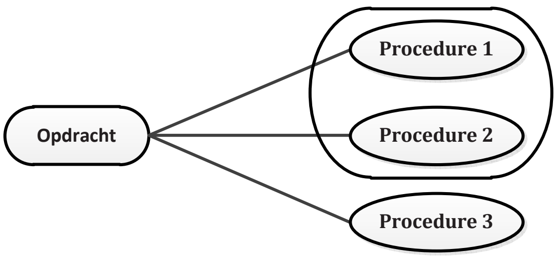
- de leerling alleen een procedure noemt (code ○);
- de procedure kiest maar niet accuraat uitvoert, dat wil zeggen niet tot een goede oplossing komt (code ◉);
- de procedure accuraat uitvoert (code ●).

Uit deze codering kunnen indicatoren 1.1 en 1.2 rechtstreeks worden afgelezen. In dit onderzoek wordt onderscheid gemaakt tussen een breed en een smal repertoire. De term *breed* repertoire wordt gebruikt wanneer een leerling tijdens één interview zes of meer procedures uit tabel 4.6 gebruikt. *Smal* repertoire betekent het gebruik van vijf of minder procedures. In paragraaf 8.2.1 wordt op de keuze voor de begrippen ‘breed’ en ‘smal’ ingegaan.

Tabel 4.6 Tien procedures die door leerlingen gebruikt zijn tijdens de interviews

	Naam procedure	Beschrijving van de procedure
1	Intervalmethode	Berekenen van de gemiddelde met een tabel of twee functiewaarden
2	Klein-intervalmethode	Gebruik van de intervalmethode op een klein interval
3	Koordenmethode	Berekenen van de richtingscoëfficiënt van een koorde uit de grafiek
4	Raaklijnmethode	Berekenen van de richtingscoëfficiënt van een getekende raaklijn
5	Rekenmachine-optie	Gebruik van de rekenmachine-optie dy/dx of tangent
6	Grafiek afgeleide	Aflezen van waarden uit de grafiek van de afgeleide functie
7	Symbolisch differentiëren	Berekenen van de afgeleide functie of afgeleide waarde
8	Aflezen richtingscoëfficiënt	Aflezen van de richtingscoëfficiënt van een lineaire formule
9	Natuurkundeformules	Toepassen van een natuurkundeformule
10	Economieformules	Toepassen van een economieformule

Indicator 1.3, de samenhang van het repertoire, is kwalitatief geanalyseerd op basis van uitspraken waarin leerlingen relaties tussen procedures verwoorden. Bijvoorbeeld als procedures met elkaar vergeleken worden of als het verband tussen procedures geëxpliciteerd wordt. Het kan ook voorkomen dat procedures geïsoleerd van andere procedures gebruikt worden (zie figuur 4.6).



Figuur 4.6 Meerdere procedures bij één opdracht, waarbij de procedures 1 en 2 aan elkaar gerelateerd worden en procedure 3 geïsoleerd staat

4.6.2 Representaties en aspecten

Het gebruik van representaties, indicator 2.1, is geanalyseerd door voor elk interview het gebruik van een representatie in een percentage uit te drukken. Daarbij zijn eerst per opdracht *maximumwaarden* vastgesteld voor het gebruik van de symbolische, de grafische en de numerieke representatie (zie tabel 4.7). Vervolgens is aan elke leerling een *score per opdracht* toegekend voor elk van de drie gebruikte representaties. Na toekenning van deze score is per representatie het *representatiepercentage* berekend. Dit geeft aan welk percentage van de maximaal haalbare score een leerling gehaald heeft. Voor de symbolische, grafische en numerieke representatie wordt het representatiepercentage genoteerd als respectievelijk RP-s, RP-g en RP-n. Deze werkwijze wordt hieronder toegelicht.

- Bepalen van de *maximumwaarde* per opdracht:
  Aan elk onderdeel van een opdracht is een maximumwaarde toegekend variërend van 0 tot 3. Hierbij geldt: 0 betekent dat de representatie door leerlingen niet kan worden gebruikt; 3 betekent dat de representatie door leerlingen veel kan worden gebruikt.
  Bijvoorbeeld: De opdracht *Watertanks-b* kan in interview 2 opgelost worden met de symbolische representatie (symbolisch differentiëren), met de grafische representatie (raaklijn- of koordenmethode) of met de numerieke representatie (klein-intervalmethode). Elke representatie kan door leerlingen veel gebruikt worden, dus de maximumwaarde bij elke representatie is 3. Omdat ditzelfde ook geldt voor de onderdelen *Watertanks-a* en *c* is de maximumwaarde voor de opdracht *Watertanks* 9. Omdat in interview 1 symbolische procedures slechts ten dele behandeld waren is de maximumwaarde voor de symbolische representatie in interview 1 bij bepaalde opdrachten lager dan in latere interviews.
- Bepalen van de *score per opdracht* voor een leerling:
  Bij elk onderdeel wordt de leerling een score toegekend gebaseerd op de werkwijze van de leerling. Als een leerling bijvoorbeeld bij de opdracht *Watertanks-b* veel handelingen, uitspraken of uitwerkingen in de symbolische representatie doet en daarbij incidenteel verwijst naar de grafische representatie wordt de maximumwaarde 3 toegekend voor de symbolische representatie, 1 voor de grafische representatie en 0 voor de numerieke representatie.
- Bepalen van het *representatiepercentage* per representatie voor een leerling:
  De scores van een leerling zijn per representatie opgeteld. Vervolgens is per representatie berekend hoeveel procent van de maximaal haalbare score een leerling gehaald heeft. Voor de symbolische, grafische en numerieke representatie wordt dit representatiepercentage genoteerd als respectievelijk RP-s, RP-g en RP-n.

Tabel 4.7 Maximumscore voor de symbolische (S), de grafische (G) en de numerieke (N) representatie

	I–1			I–2			I–3			I–4		
	S	**G**	**N**	**S**	**G**	**N**	**S**	**G**	**N**	**S**	**G**	**N**
1. Watertanks	5	9	9	9	9	9	6	6	6	9	9	9
2. Tikkerband	1	7	6	-	-	-	1	7	6	-	-	-
3. Kogel				3	3	3				3	3	3
4. Monopolie	3	6	6	6	6	6				6	6	6
5. Kosten							4	4	4			
6. Remweg				2	2	2				2	2	2
7. Benzine				2	2	2	2	2	2	2	2	2
8. Steen	0	3	0									
9. Ballon				n	n	n						
10. VT-diagram							0	4	0			
maximum	9	25	21	22	22	22	13	23	18	22	22	22

n: geeft aan dat de opdracht *Ballon* niet is meegenomen in de scores. Daardoor zijn de interviews 2 en 4 geanalyseerd op basis van identieke opdrachten

Kortom het representatiepercentage geeft weer in welke mate een leerling een representatie gebruikt ten opzichte van een vooraf vastgestelde maximumwaarde. Door deze werkwijze kan het gebruik van de representaties in de vier interviews met elkaar worden vergeleken. Hierbij moet worden aangetekend dat de interviews niet dezelfde opdrachten bevatten. Daardoor hebben de representatiepercentages per interview niet dezelfde basis. In tabel 4.7 is bijvoorbeeld zichtbaar dat de opdracht *Watertanks* in interview 3 maar voor een deel is opgenomen. Alleen de interviews 2 en 4 zijn geanalyseerd op basis van identieke opdrachten, namelijk *Kogel*, *Watertanks*, *Remweg*, *Benzine* en *Monopolie*. Hierdoor zijn de representatiepercentages van de interviews 2 en 4 één-op-één vergelijkbaar.

Indicator 2.2 betreft het noemen van aspecten van het concept afgeleide. Aspecten van het concept afgeleide zijn woorden waarmee leerlingen het concept afgeleide interpreteren, zoals ‘richtingscoëfficiënt’, ‘steilheid’, ‘differentiequotiënt’, ‘verandering’ of ‘snelheid’. Als een leerling een bereken- of redeneeropdracht oplost, kunnen verschillende aspecten van het concept afgeleide genoemd worden. In berekenopdrachten kan dit vervolgens resulteren in het gebruik van een bepaalde procedure. Bijvoorbeeld als een leerling zegt: “*Het gaat in deze opdracht om de steilheid in dat punt, dus ik bereken de afgeleide en vul t = 40 in*.” In deze uitspraak is het aspect ‘de steilheid’ en de procedure ‘symbolisch differentiëren’.

Het noemen van aspecten is zowel kwantitatief als kwalitatief geanalyseerd.

- De *kwantitatieve analyse* is uitgevoerd door te registreren hoe vaak een leerling een bepaald aspect noemt. Daarbij wordt per onderdeel van een opdracht een aspect maximaal één keer geteld. Het herhaald noemen van hetzelfde aspect bij één onderdeel wordt dus niet meegewogen.
- De *kwalitatieve analyse* is uitgevoerd door te analyseren in hoeverre leerlingen aspecten aan elkaar relateren. Een leerling die bijvoorbeeld zegt: "*Het gaat om de richtingscoëfficiënt, dus de snelheid, die kan ik berekenen met de afgeleide*" relateert twee aspecten, namelijk 'richtingscoëfficiënt' en 'snelheid', aan elkaar.

  Ook is geanalyseerd of een leerling aan meerdere opdrachten hetzelfde aspect relateert. Als een leerling zegt: "*Het gaat hier weer* (net als in een eerder onderdeel, GR) *om de steilheid dus gebruik ik weer de afgeleide*", dan wordt het aspect 'steilheid' aan meerdere opdrachten gerelateerd en op basis daarvan kiest de leerling voor eenzelfde procedure om de verschillende opdrachten op te lossen.

4.6.3 Overzicht van de gebruikte analysemethoden

De opdracht-gebaseerde interviews zijn zowel kwantitatief als kwalitatief geanalyseerd. De volgende analysemethoden zijn toegepast.

1. Codering en tellen van de door een leerling gebruikte procedures (indicator 1.1 en 1.2).
2. Berekening van de representatiepercentages (indicator 2.1).
3. Codering en registratie van het aantal genoemde aspecten (indicator 2.2).
4. Beschrijving van uitspraken en uitwerkingen van leerlingen waarin leerlingen procedures aan elkaar relateren (indicator 1.3).
5. Beschrijving van uitspraken van leerlingen waarin ze aspecten aan elkaar relateren en bij verschillende opdrachten dezelfde aspecten noemen (indicator 2.2).

De resultaten van dit onderzoek worden in hoofdstuk 6 per casus in alfabetische volgorde beschreven. Vervolgens worden verschillen en overeenkomsten tussen de tien casussen beschreven en geanalyseerd in een cross-case-analyse in hoofdstuk 7.

Hoofdstuk 5 Onderwijscontext

5.1 Introductie

Het hoofddoel van mijn onderzoek is het verkrijgen van kennis over de manier waarop leerlingen wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide ontwikkelen. In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe het concept afgeleide op de beide scholen aan bod komt en in hoeverre schoolvakken de leerstof op elkaar afstemmen. Deze beschrijving van de onderwijscontext is van belang om de ontwikkeling van leerlingen te kunnen interpreteren en verklaren.

In de hoofdstukken 3 en 4 is beschreven welke procedures en aspecten onderdeel kunnen zijn van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. Deze procedures en aspecten worden vooral behandeld bij wiskunde, maar ook bij natuurkunde en economie. In dit hoofdstuk wordt beschreven in hoeverre die procedures en aspecten op school A (paragraaf 5.2) en school B (paragraaf 5.3) aan de leerlingen worden aangeboden. In paragraaf 5.4 worden beide scholen met elkaar vergeleken.

Voor de beschrijving van deze onderwijscontext heb ik me gebaseerd op informatie uit de schoolboeken, de studiewijzers, extra lesmateriaal en de aantekeningen van leerlingen. Ook de interviews met de docenten van de leerlingen hebben bijgedragen aan de beschrijving van de onderwijscontext.

5.2 Het concept afgeleide op school A

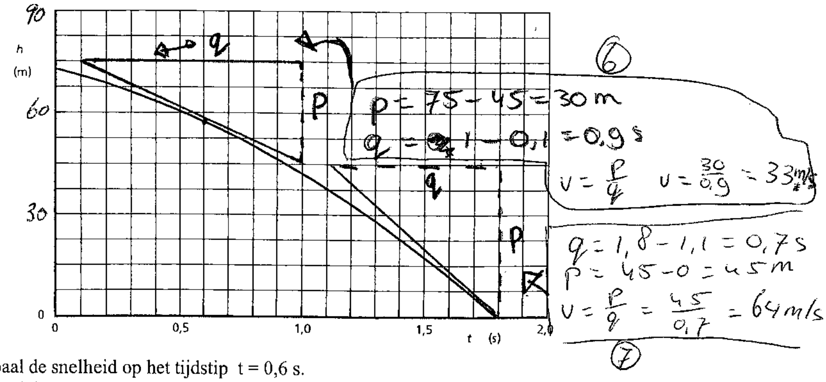
Op school A hebben de onderzochte leerlingen les gehad van de wiskundedocenten P en Q, de natuurkundedocenten R, S en T en de economiedocenten U en V. De gebruikte schoolboeken zijn voor wiskunde *Getal en Ruimte* (de voor dit onderzoek relevante delen zijn Vuijk e.a. (1998, 1999a, 1999b, 2000), voor natuurkunde *Systematische Natuurkunde* (Middelink e.a., 1998, 1999, 2000a, 2000b, 2001) en voor economie de lesbrieven van de Stichting Landelijke Werkgroep Economie Onderwijs (1998).

Voor interview 1

Voor interview 1, toen de leerlingen in vwo 4 zaten, zijn aspecten van het concept afgeleide behandeld bij de vakken natuurkunde en economie, maar niet bij wiskunde.

Bij *natuurkunde* worden in het hoofdstuk ‘Beweging’ (Middelink e.a., 1998) formules voor gemiddelde snelheid ($v_{gem} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$), gemiddelde versnelling ($a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$) en eenparig versnelde bewegingen zonder beginsnelheid ($v = a \cdot t$ en

$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$) geïntroduceerd. De uitleg wordt met grafieken ondersteund: leerlingen leren de gemiddelde snelheid en de snelheid op een tijdstip grafisch te bepalen. In het boek wordt bijvoorbeeld beschreven: "*Is een plaats-tijd-diagram gegeven, dan is met de 'raaklijnmethode' een snelheid-tijd-diagram te maken*" (Middelink e.a., 1998, p.68) en "*De snelheid op een tijdstip kun je grafisch bepalen door (op de juiste plaats) een raaklijn te trekken aan de (x-t)-grafiek en van die raaklijn de steilheid te bepalen*" (Middelink e.a., 1998, p.66).
In figuur 5.1 is de uitwerking van een proefwerkopdracht van één van de leerlingen weergegeven, waar een momentane snelheid grafisch wordt berekend. De letters *p* en *q* in deze figuur worden ook in het boek gebruikt om horizontale en verticale verschillen aan te geven.



6 □ Bepaal de snelheid op het tijdstip t = 0,6 s.
7 □ Bepaal de snelheid op het moment dat de prop de grond raakt.

Figuur 5.1 Grafiek in een proefwerk (nov, 2006) waar grafisch twee maal een momentane snelheid wordt bepaald

Bij *economie* is op school A het onderwerp micro-economie in vwo 4 behandeld uit de lesbrieven van de Stichting Landelijke Werkgroep Economie Onderwijs (1998). De economiedocenten (U en V) vinden het belangrijk dat leerlingen al in vwo 4 kennismaken met de wiskundige kant van het schoolvak economie. Begrippen als totale kosten, gemiddelde kosten en marginale kosten worden in de les besproken en op de toets teruggevraagd. Eén van de proefwerkvragen (maart, 2006) is bijvoorbeeld: "Omschrijf de betekenis van MK = 10 bij een productie-eenheid 3."
Bij *wiskunde* is op school A in de periode voor interview 1 gewerkt aan hoofdstukken uit het boek Getal en Ruimte (Vuijk e.a., 1999a) over typen functies zoals lineaire, kwadratische, exponentiële en gebroken functies en bijbehorende grafieken. Bij lineaire functies komt één aspect van het concept afgeleide, de richtingscoëfficiënt van een lijn, aan de orde. Andere aspecten en procedures van het concept afgeleide zijn voor interview 1 bij wiskunde niet behandeld.

Van alle aspecten en procedures van het concept afgeleide als beschreven in figuur 3.2 zijn dus met name aspecten en procedures bij economie en natuurkunde behandeld, namelijk:

- bij natuurkunde: gemiddelde snelheid, snelheid op een tijdstip, steilheid van de raaklijn en versnelling;
- bij economie: marginale kosten en de toename van de kosten als de productie met één toeneemt.

Bij beide vakken speelt de grafische representatie een centrale rol (zie ook Den Braber, 2007). In tabel 5.1 is schematisch weergegeven welke procedures en aspecten voor interview 1 op school A behandeld zijn.

School A, tussen interview 1 en interview 2

Bij *natuurkunde* en *economie* is de lesstof tussen interview 1 en 2 niet gerelateerd aan het concept afgeleide, terwijl in deze periode bij *wiskunde* de differentiaalrekening wordt geïntroduceerd. Dit gebeurt aan de hand van een hoofdstuk getiteld 'Veranderingen en snelheden' (Vuijk e.a., 1998b) over toenamediagrammen, het differentiequotiënt, de helling in een punt en hellinggrafieken. Dit hoofdstuk bevat een variatie aan aspecten, zoals richtingscoëfficiënt, helling, (gemiddelde) snelheid, (gemiddelde) verandering of toename en differentiequotiënt. Direct aansluitend volgt het hoofdstuk 'De afgeleide functie' (Vuijk e.a., 1999), waarin wordt toegewerkt naar differentieerregels van polynomen. Dit tweede hoofdstuk bevat minder aspecten van het concept afgeleide: de nadruk ligt op snelheid, de snelheidsformule, de richtingscoëfficiënt en daarnaast op de procedure symbolisch differentiëren. Voor deze twee hoofdstukken zijn dertien lessen gepland, waarbij leerlingen werken aan een selectie van opdrachten uit het boek. Bij de geselecteerde opdrachten is gekozen voor variatie: kale opdrachten over functies en grafieken afhankelijk van de variabele *x* afgewisseld met opdrachten over tijd-afstand formules en grafieken waarin zowel de gemiddelde als de momentane snelheden berekend worden.

De manier waarop tijd-afstand formules in de wiskundelessen naar voren komen laat zien hoe natuurkundige situaties gebruikt worden in de wiskundelessen. Ook kunnen hiermee de uitspraken van leerlingen van school A geduid worden.

Eerst wordt bij een formule $s = at^2 + bt + c$ met de klein-intervalmethode de snelheid op één punt benaderd. Daarna wordt de snelheidsformule $v = 2at + b$ afgeleid met behulp van de limietdefinitie van de afgeleide (zie figuur 5.2). Na deze opdracht vat het boek samen dat de snelheidsformule $s = at^2 + bt + c$ van gelijk is aan $v = 2at + b$ (figuur 5.3).

8a $a(t+h)^2 + b(t+h) + c =$

$a(t+h)(t+h) + b(t+h) + c =$

$a(t^2 + 2ht + h^2) + bt + bh + c =$

$at^2 + 2aht + ah^2 + bt + bh + c$

b $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{(a(t+h)^2 + b(t+h) + c) - (at^2 + bt + c)}{h} = \dfrac{at^2 + 2aht + 2ah^2 + bt + bh + c - at^2 - bt - c}{h} = \dfrac{2aht + 2ah^2 + bh}{h} = \dfrac{h(2at + 2ah + b)}{h} = 2at + 2ah + b$

c $v = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + b$

d $v = 2 \cdot 5t - 3$

$= 10t - 3$

Figuur 5.2 Uitwerking van opdracht 8, uit het schrift van Fleur, waarin de afgeleide van $s = at^2 + bt + c$ wordt berekend met de limietdefinitie

Het berekenen van de snelheid bij een gegeven formule via het differentie-quotiënt vereist meestal veel rekenwerk. Gelukkig zijn er regels waarmee je de snelheidsformule in een aantal gevallen zo kunt opschrijven.
In opgave 8 heb je ontdekt:
als $s = at^2 + bt + c$ dan is $v = 2at + b$.

$s = at^2 + bt + c$ geeft $v = 2at + b$

Figuur 5.3 Tekst uit het wiskundeboek (Vuijk e.a., 1999, p.47)

Een situatie uit de natuurkunde wordt in het wiskundeboek van school A dus gebruikt bij de introductie van de differentiaalrekening. Na deze eerste paragraaf wordt overgestapt van verplaatsingen en snelheden naar functies van *x*. Het boek vermeldt: "*Bij functies in de wiskunde beperkt men zich echter niet tot verplaatsingen en snelheden. Men gebruikt dan bij de functie f de notatie f′(x) in plaats van v*" (Vuijck e.a., 1999, p.50).
De geselecteerde opdrachten in de studieplanner betreffen verder enkel nog functies die afhankelijk zijn van *x*. Daarbij komen de volgende onderwerpen aan de orde: het opstellen van formules van raaklijnen, het berekenen van extremen en de som-, product- en quotiëntregel.
De wiskundedocenten P en Q die in vwo 5 lesgeven, volgen in hun uitleg de lijn van het boek en maken tijdens de uitleg van het concept afgeleide veel gebruik van de grafische representatie. Ze stimuleren leerlingen bij een opdracht eerst de grafiek te plotten om een indruk te krijgen van het gedrag van de functie. Ook de rekenmachine-optie om de afgeleide waarde in één punt te vinden wordt behandeld. De leerlingen mogen deze optie gebruiken maar bij veel opdrachten in het boek moeten de antwoorden via algebraïsche weg berekend worden.

Het wiskundeboek noemt een variatie aan aspecten, maar de nadruk valt op aspecten als richtingscoëfficiënt, differentiequotiënt, snelheid en afgeleide, terwijl (gemiddelde) verandering, toename of helling niet of nauwelijks genoemd worden (zie tabel 5.1).

School A, tussen interview 2 en interview 3

In de periode tussen interview 2 en interview 3 is op school A de lesstof in de schoolvakken *economie* en *natuurkunde* niet gerelateerd aan het concept afgeleide. Bij *wiskunde* is dat in beperkte mate het geval. In deze periode worden in één hoofdstuk de rekenregels voor het differentiëren van exponentiële en logaritmische functies afgeleid. Dit gebeurt met behulp van de limietdefinitie. Omdat de limietdefinitie vooral symbolisch wordt gehanteerd komen andere aspecten van het concept afgeleide nauwelijks naar voren. Alleen het aspect richtingscoëfficiënt wordt genoemd. Er wordt in dit hoofdstuk vervolgens geoefend op symbolisch differentiëren van exponentiële en logaritmische functies en het toepassen van deze regels bijvoorbeeld bij het opstellen van formules van raaklijnen.

School A, tussen interview 3 en interview 4

Bij *wiskunde* worden in de eerste vijf weken van vwo 6 twee hoofdstukken behandeld waarin aspecten en procedures van het concept afgeleide worden herhaald en uitgebreid. In het hoofdstuk getiteld ‘Afgeleide en tweede afgeleide’ (Vuijk e.a., 2000) wordt de kettingregel uitgelegd. Leerlingen oefenen de differentieerregels en passen het differentiëren toe om bijvoorbeeld coördinaten van buigpunten te berekenen, een buigraaklijn op te stellen of extremen in optimaliseringsvraagstukken te vinden. Enkele opdrachten gaan over natuurkundige situaties. Aan de hand van een gegeven formule voor snelheid of versnelling moet bijvoorbeeld via integreren een formule gevonden worden voor de afgelegde weg.

Alle procedures en aspecten uit het afgeleideschema (zie figuur 3.2) zijn hiermee in de lessen van school A behandeld. De nadruk ligt in deze wiskundelessen op het oefenen van differentieerregels van functies van de variabele x en het toepassen van deze differentieerregels bij het berekenen van bijvoorbeeld extremen, raaklijnen en buigpunten. Opdrachten in natuurkundige situaties komen na de introductie van de differentiaalrekening nauwelijks meer voor en worden in de selectie van opdrachten in de studiewijzer vaak weggelaten. Opdrachten gebaseerd op economische situaties komen in de wiskundeboeken voor de natuur-profielen helemaal niet voor.

Bij de lessen *natuurkunde* wordt in verband met een schoolexamentoets alle mechanica herhaald die tot dan toe in het vwo is behandeld. Voor de leerlingen in het profiel Natuur en Gezondheid zijn dat de hoofdstukken met de titels ‘Beweging’, ‘Kracht en Moment’ en ‘Arbeid en Energie’. Voor de Natuur en

Techniek-leerlingen wordt dit nog aangevuld met hoofdstukken over impuls, stoot, horizontale worp en cirkelbewegingen.
Ook in de lessen *economie* wordt het onderdeel marginale kosten en opbrengsten uit de micro-economie voor de schoolexamentoets kort herhaald.

In tabel 5.1 is een samenvattend overzicht gegeven van het gegeven onderwijs op school A wat betreft procedures en aspecten van het concept afgeleide. Uit tabel 5.1 is af te lezen dat intervalmethoden nauwelijks aan bod komen, dat de koordenmethode en de raaklijnmethode voor het eerst en nadrukkelijk aan bod komen bij natuurkunde en dat het symbolisch differentiëren (procedure 7) wel bij economie en wiskunde maar niet bij natuurkunde wordt behandeld. De meeste aspecten kunnen worden gekoppeld aan één vak. Aspecten die een brug tussen vakken zouden kunnen slaan zijn: 'richtingscoëfficiënt', 'snelheid' en 'delta y gedeeld door delta x'.

De afstemming tussen schoolvakken
Uit interviews met docenten van de vakken wiskunde, natuurkunde en economie blijkt dat er op school A geen structureel overleg is tussen secties over het afstemmen van deze vakken. Wiskundedocente P zegt: "*er is een goede sfeer tussen de secties, maar inhoudelijk is er geen overleg*." Natuurkundedocent R illustreert het afstemmingsprobleem met een voorbeeld wanneer hij zegt: "*Ik vind het wel belangrijk dat ik weet, als natuurkundeleraar, wat voor woord ze daarvoor* (bedoeld wordt 'steilheid', GR) *leren bij wiskunde. Dat weet ik op dit moment niet, omdat het weer vernieuwd is*."
Wel overleggen docenten van verschillende secties op individuele basis over onderdelen uit de wiskunde die in natuurkunde of economie voorkomen. De economiedocent merkt op dat sommige docenten uit de economiesectie zowel wiskunde als economie geven. In de sectie wordt informatie over wiskunde in het economie-onderwijs uitgewisseld. Docent U zegt daarover: "*Voor praktische zaken is dat handig; ik vraag bijvoorbeeld wanneer bij wiskunde differentiëren behandeld wordt en hoe je bij wiskunde een bepaalde berekening uitvoert, bijvoorbeeld met kruistabellen*." Daarnaast vertelt natuurkundedocent T dat hij soms in de klas aan leerlingen vraagt wat ze geleerd hebben bij wiskunde, zodat hij in zijn uitleg daarop aan kan sluiten: "*Ik houd heel goed in de gaten wat ze vanuit de wiskunde binnen brengen. Bijvoorbeeld richtingscoëfficiënt, hoe doen jullie dat? Dan zit er vaak wel een slimme leerling in de klas die weet wat ze bij wiskunde gebruiken.* […] *Dan ga ik zoeken naar parallellen met wiskunde, voor zover ik ze ken*."
De wiskundedocenten P en Q vertellen dat ze af en toe natuurkundige of economische situaties gebruiken om concepten uit het vak wiskunde te verduidelijken. Daarbij worden relaties met het schoolvak economie of natuurkunde niet geëxpliciteerd of bediscussieerd. Docente P merkt op dat leerlingen deze relatie soms wel leggen: "*Ik benader alles heel wiskundig.*

Leerlingen die goed zijn in natuurkunde willen wel eens de overstap maken naar de natuurkundige interpretatie.”

Tabel 5.1 Procedures en aspecten in het gegeven onderwijs op school A

	Periode	tot I-1			I-1	I-1 tot I-2			I-2	I-2 tot I-3			I-3	I-3 tot I-4			I-4
	Procedures	wi	na	ec		wi	na	ec		wi	na	ec		wi	na	ec	
1	Intervalmethode					0											
2	Klein-intervalmethode					0								0			
3	Koordemethode		++			+											
4	Raaklijnmethode		++			0									++		
5	Rekenmachine-optie					+				+							
6	Grafiek afgeleide		0			++								+			
7	Symbolisch differentiëren			0		++				++				++		0	
8	Aflezen richtingscoëfficiënt	++				++											
9	Natuurkundeformules		++												++		
10	Economieformules			+												++	
	Aspecten																
	Richtingscoëfficiënt	++				++				++				++			
	Differentiecoëfficiënt					++								0			
	Differentiaalcoëfficiënt					0											
	Steilheid		++														
	Helling		0			++											
	Snelheid		++			++				0				0	+		
	Gemiddelde snelheid		++			+									+		
	(Gemiddelde) toename			+		0											
	Delta y / delta x		+			++				0				0			
	Marginale kosten			++												+	
	(Gemiddelde) verandering					0											

++: komt vaak voor; +: komt regelmatig voor; 0: komt een enkele maal voor

Samenvatting onderwijscontext school A

Op school A worden voor interview 1 vooral bij natuurkunde en economie aspecten en procedures van het concept afgeleide behandeld met een nadruk op de grafische representatie. Tussen interview 1 en interview 2 volgt bij wiskunde de introductie van de differentiaalrekening, waarbij verschillende aspecten naar voren komen.

Tussen interview 2 en interview 3 worden bij wiskunde de differentieerregels uitgebreid naar een variatie aan functies. Daarbij wordt vooral geoefend op het

symbolisch differentiëren. Bij economie en natuurkunde zijn in de periode vanaf interview 1 tot 3 geen onderwerpen aangeboden die raakvlakken hebben met het concept afgeleide.
Voor interview 4 wordt de differentiaalrekening bij wiskunde herhaald en uitgebreid met de kettingregel en de tweede afgeleide. Bij natuurkunde en economie worden de onderwerpen kinematica en micro-economie voor een schoolexamentoets kort herhaald.
Afstemming tussen wiskunde, natuurkunde en economie vindt op school A niet structureel plaats. Door individuele initiatieven proberen docenten van natuurkunde en economie soms aan te sluiten op voorkennis die bij wiskunde is opgedaan. Wiskundedocenten gebruiken af en toe natuurkundige of economische situaties maar zijn in hun uitleg gericht op het wiskundige concept of de wiskundige procedure die uitgelegd wordt.

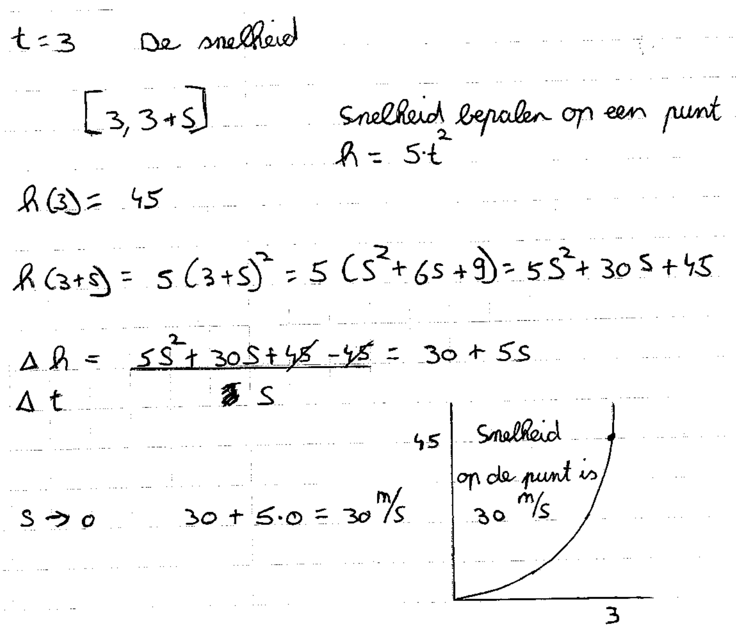
5.3 Het concept afgeleide op school B

Op school B hebben de onderzochte leerlingen les gehad van de wiskundedocenten A en B, de natuurkundedocenten F en G en de economiedocent H. De gebruikte schoolboeken zijn voor wiskunde *Netwerk* (de voor dit onderzoek relevante delen zijn Boon e.a., 1998, 1999, 2000), voor natuurkunde Scoop (Biezeveld & Mathot, 1998, 1999, 2000) en voor economie *Economie in Balans* (Van den Haak & Pelssers, 2002, 2003).

School B, voor interview 1
Omdat *natuurkunde* in vwo 4 niet wordt aangeboden voor interview 1, zijn op school B weinig aspecten van het concept afgeleide aan bod gekomen. De leerlingen hebben een jaar eerder in de derde klas bij natuurkunde wel een formule $v = \frac{s}{t}$ voor gemiddelde snelheid geleerd.
De vwo 4-leerlingen hebben allemaal *economie*, maar bij dit schoolvak zijn in deze periode geen procedures of aspecten van het concept afgeleide aan de orde gekomen.
Bij *wiskunde* is in de periode voor interview 1 gewerkt aan hoofdstukken over allerlei typen functies zoals lineaire, kwadratische, exponentiële en gebroken functies en bijbehorende grafieken. Daarin komt alleen het aspect ‘richtingscoëfficiënt’ bij lineaire functies naar voren. Andere procedures en aspecten van het concept afgeleide worden niet behandeld.

School B, tussen interview 1 en interview 2
Na afname van interview 1 is in de laatste schoolweken van vwo 4 bij *wiskunde* een begin gemaakt met de differentiaalrekening aan de hand van het hoofdstuk ‘Hellingen’ uit het boek *Netwerk A1/B1 deel 1* (Boon, e.a., 1998). Enkele paragrafen uit dit hoofdstuk gaan over het differentiequotiënt en de helling in

een punt van de grafiek. Daarin wordt uitgelegd hoe de afgeleide waarde in een punt berekend kan worden.
Om latere uitspraken van leerlingen in mijn onderzoek te kunnen duiden beschrijf ik hieronder op welke manier docent A het limietproces heeft behandeld. In twee lessen is met de definitie van de afgeleide functie een afgeleide waarde berekend. In de eerste les werd aan de hand van een voorbeeld de valsnelheid op één tijdstip berekend (zie figuur 5.4). In de tweede les werd de kostenstijging bij een bepaalde productie berekend. In beide voorbeelden werd eerst het differentiequotiënt op een interval met stapgrootte *s* uitgeschreven. Daarna werd voor *s* de waarde nul gekozen.


$t=3$ De snelheid

$[3, 3+s]$ Snelheid bepalen op een punt

$h = 5 \cdot t^2$

$h(3) = 45$

$h(3+s) = 5(3+s)^2 = 5(s^2+6s+9) = 5s^2+30s+45$

$\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{5s^2+30s+\cancel{45}-\cancel{45}}{s} = 30+5s$

$s \to 0$ $30 + 5 \cdot 0 = 30\ m/s$

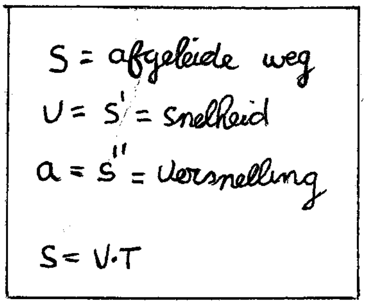
Figuur 5.4 Aantekening uit het wiskundeschrift van Otto

Aansluitend aan dit hoofdstuk hebben leerlingen in vwo 4 geoefend op de techniek van het differentiëren aan de hand van materiaal dat door docenten van de school ontwikkeld is. Dit materiaal bevat opdrachten waarin leerlingen rijtjes functies differentiëren. Op het afsluitende proefwerk wordt bijvoorbeeld gevraagd de functies $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = x^4 + 2x^2 - 2x + 2$ en $h(x) = \frac{3x^4+5x^3}{x^2}$ te differentiëren.
In de eerste twee maanden van vwo 5 wordt in drie hoofdstukken een vervolg gegeven aan de behandeling van de differentiaalrekening. Docent B, die leerlingen van mijn onderzoek in vwo 5 en 6 wiskunde heeft gegeven, begint elk van deze hoofdstukken met het noemen en oefenen van de differentieerregels. Opdrachten in een situatie worden in eerste instantie overgeslagen. Pas na oefening van de differentieerregels volgen opdrachten

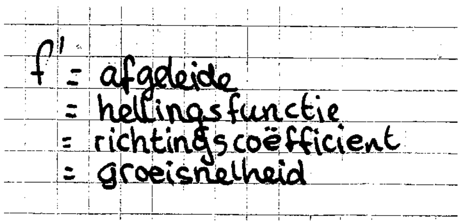
waarin differentieerregels in situaties worden gebruikt. Docent B zegt hierover: *"Ik train eerst wiskunde in en daarna toepassingen. Aan het eind van de vijfde en in de zesde, vind ik dat ze er wat mee moeten kunnen.*"

Deze opmerkingen van docent B worden bevestigd door de volgorde van de gemaakte opdrachten in de schriften. Het vwo 5-schrift van de leerlingen begint met de regel voor het differentiëren van polynomen waarna allerlei opdrachten volgen om deze differentieerregels te oefenen. Na het oefenen van deze technieken laat de docent de leerlingen ook opdrachten in situaties maken, bijvoorbeeld over een optrekkende auto waarbij een x-t grafiek is gegeven, of over een vallende steen waarbij de afgelegde weg wordt gegeven door de formule $s = 5t^2$. Deze wiskundedocent heeft in de les bepaalde verbanden tussen wiskunde en natuurkunde en betekenissen van de afgeleide geëxpliciteerd (zie figuur 5.5 en figuur 5.6). Uit de schriften van de leerlingen blijkt dat de meeste opdrachten niet in situaties beschreven zijn. Docent B is in de periode voorafgaand aan interview 2 enkele weken afwezig geweest. Hij heeft daardoor minder tijd gehad voor de opdrachten waarin wiskunde in situaties wordt toegepast.

Docent B stimuleert het gebruik van de grafische rekenmachine niet. Hij vertelt dat antwoorden gecontroleerd kunnen worden met de rekenmachine, maar hij laat de leerlingen vooral antwoorden exact berekenen, dus zonder rekenmachine. Hij vermeldt dat hij in vwo 6, voor het examen, de leerlingen expliciet traint te beslissen of ze een opdracht met een berekening of met de rekenmachine kunnen oplossen.

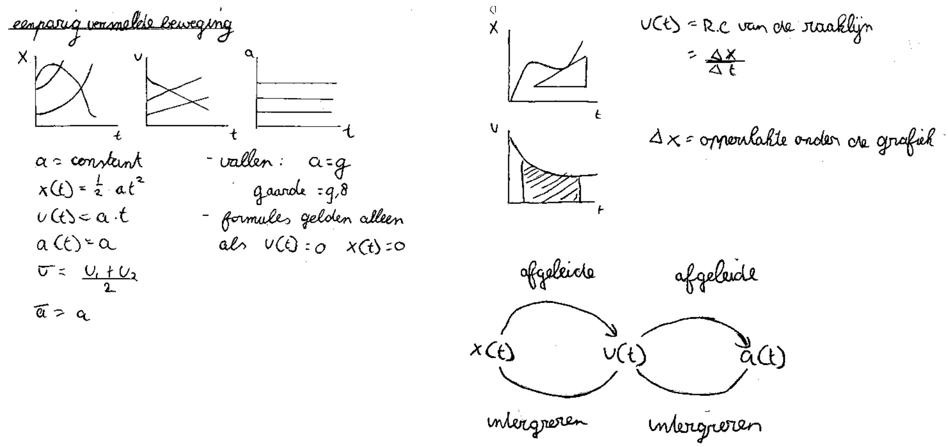


Figuur 5.5 Aantekening uit het wiskundeschrift van Otto (hij heeft op de eerste regel 'afgeleide' in plaats van 'afgelegde' opgeschreven)



Figuur 5.6 Aantekening uit het wiskundeschrift van Maaike

Bij *natuurkunde* zijn in de eerste maanden van vwo 5 hoofdstukken over kinematica en mechanica behandeld. Het betreft de hoofdstukken 'Bewegen', 'Versnellen' en 'Twee wetten van Newton' (Biezeveld & Mathot,1998). In deze hoofdstukken leren de leerlingen aan de hand van formules en grafieken opdrachten op te lossen over afgelegde weg, snelheid en versnelling. In figuur 5.7 staat een deel van de samenvatting die Otto vlak voor het proefwerk in november 2006 in zijn schrift heeft geschreven. Hieruit blijkt dat de natuurkundedocent begrippen uit het schoolvak wiskunde, zoals richtings-coëfficiënt, afgeleide en integreren heeft genoemd.



Figuur 5.7 Aantekeningen uit het natuurkundeschrift van Otto

Bij *economie* is het onderdeel micro-economie in vwo 5 behandeld. De docent van het vak vertelt dat hij in de les veel nadruk legt op de economische betekenis van bepaalde formules en minder op de rekentechnieken. Over het onderwerp marginale kosten zegt hij bijvoorbeeld: "*De essentie is, we gaan één extra produceren; de overweging is 'gaan we iets extra's produceren?' Ja, want de winst neemt toe, dus doen we dat. Het gaat om het verband te zien tussen het gevolg en de oorzaak*" (zie ook Vos e.a., 2010). De economiedocent vertelt dat hij veel nadruk legt op toenames van kosten en opbrengsten als de productie met één toeneemt.
In tabel 5.2 is schematisch weergegeven welke procedures en aspecten voor interview 2 op school B behandeld zijn.

Tussen interview 2 en interview 3
In deze periode gaan de onderwerpen in het schoolvak *economie* niet over aspecten van het concept afgeleide.
Bij *natuurkunde* is dit in beperkte mate het geval. Alleen de leerlingen die natuurkunde-12 volgen, krijgen een hoofdstuk over de wetten van Newton bij cirkelbewegingen en kogelbanen.
Bij *wiskunde* worden in een hoofdstuk over goniometrische functies regels gegeven om deze functies te differentiëren. Bovendien wordt een hoofdstuk over optimaliseren behandeld.

Tussen interview 3 en interview 4

Bij *wiskunde* worden naast hoofdstukken over statistiek en meetkunde in deze periode nog twee analysehoofdstukken behandeld. Beide gaan over integraalrekening. In vwo 6 wordt bij wiskunde veel geoefend voor het examen aan de hand van extra oefenopdrachten. De docent behandelt, vooral bij wiskunde-B1, hoe bepaalde typen opdrachten moeten worden opgelost. Docent B zegt hierover: "*Bij wiskunde-B1 maak ik categorieën van typen sommen die er zijn. Die oefenen we veel; wiskunde-B1 is trainbaar*." Bij wiskunde-B2 kan dit volgens docent B niet goed. Daar moet je meer talent voor hebben. Over het oefenen zegt hij nog: "*Wiskunde trainen is: steeds de som iets anders stellen, dat ze net een stap zelf ook moeten doen en dan op bekend terrein komen en dan gaat het 'zoef naar het einde'. Ze moeten de opdracht vertalen naar iets wat ze kennen*."

Een voorbeeld van een oefenopdracht voor het examen is weergegeven in figuur 5.8. Bij de oefenopdrachten moeten de leerlingen veel berekeningen met formules uitvoeren.

Gegeven is de functie $g(x) = \sqrt{(\ln x)}$
a. Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van g in $x = 1$.
b. De grafiek van g wordt tussen $x = 1$ en $x = a$ om de x-as gewenteld. De inhoud van het omwentelingslichaam is π. Bereken de exacte waarde van a.

Figuur 5.8 Opdracht uit het materiaal met oefenopdrachten voor het examen

In deze periode komen bij *natuurkunde* in de meeste hoofdstukken geen aspecten van het concept afgeleide naar voren. Alleen in het hoofdstuk over radioactief verval moeten leerlingen met de formule $A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ de activiteit van een radioactieve stof bepalen.

Bij *economie* wordt het onderwerp micro-economie voor een schoolexamen-toets kort herhaald.

In tabel 5.2 is een samenvattend overzicht gegeven van het gegeven onderwijs op school B wat betreft procedures en aspecten van het concept afgeleide.

De afstemming tussen schoolvakken

In tabel 5.2 is te zien dat de procedures 1 – 6 minder aandacht krijgen dan het symbolisch differentiëren. De meeste procedures en aspecten van het concept afgeleide worden aan het begin van vwo 5 behandeld, in dezelfde periode bij wiskunde, natuurkunde en economie. Enkele aspecten worden zowel bij wiskunde als bij natuurkunde genoemd: 'richtingscoëfficiënt', '(gemiddelde) snelheid' en 'delta y/delta x'.

Tabel 5.2 Procedures en aspecten in het gegeven onderwijs op school B

	Periode	tot I-1			I-1	I-1 tot I-2			I-2	I-2 tot I-3			I-3	I-3 tot I-4			I-4
	Procedures	wi	na	ec		wi	na	ec		wi	na	ec		wi	na	ec	
1	Intervalmethode					+	0										
2	Klein-intervalmethode					+											
3	Koordemethode					+	0										
4	Raaklijnmethode						++										
5	Rekenmachine-optie													0			
6	Grafiek afgeleide					0								0			
7	Symbolisch differentiëren					++		0		++				++			
8	Aflezen richtingscoëfficiënt	++				0											
9	Natuurkundeformules						++								++		
10	Economieformules							+								0	
	Aspecten																
	Richtingscoëfficiënt	++				++	0			+				++			
	Differentiecoëfficiënt					+											
	Differentiaalcoëfficiënt					+											
	Steilheid						+										
	Helling					++											
	Snelheid					++	++			++					++		
	Gemiddelde snelheid					+	++								0		
	(Gemiddelde) toename							++								++	
	Delta y / delta x					+	0								0		
	Marginale kosten							+		0						+	
	(Gemiddelde) verandering					0											

++: komt vaak voor; +: komt regelmatig voor; 0: komt een enkele maal voor

Ook op school B wordt geen structureel overleg gevoerd tussen secties over het afstemmen van de vakken wiskunde en natuurkunde of wiskunde en economie. Natuurkundedocent F zegt daarover: "*In het verleden waren er wel gezamenlijke vergaderingen, maar dat is nu niet meer zo.* […] *Informeel contact is er altijd wel. Docenten van biologie, scheikunde en natuurkunde zitten in de pauze vaak aan één tafel, de wiskunde zit apart.*" Ook de economiedocent merkt op dat hij contact heeft met individuele wiskundedocenten, maar dat er geen regulier overleg is over afstemming van de beide vakken (zie ook Vos e.a., 2010)

De economiedocent vertelt dat hij in de les veel nadruk legt op de economische betekenis van bepaalde formules en minder op de rekentechnieken. Hij illustreert dit met het voorbeeld dat hij bij het begrip marginale kosten veel nadruk legt op de betekenis van de toename van kosten als de productie één toeneemt.
De beide natuurkundedocenten leggen uit op welke manier zij in hun les relaties tussen de vakken natuurkunde en wiskunde leggen. Docent F zegt dat hij bij mechanica bijvoorbeeld de raaklijn en de oppervlakte onder de grafiek "*wel eens de kreet laat vallen dat het eigenlijk differentiëren, integreren is; maar je doet er voor de rest niets mee*". Docent G geeft zowel wiskunde als natuurkunde en laat in zijn reacties blijken dat hij goed op de hoogte is van het curriculum van beide vakken. Hij geeft een voorbeeld hoe hij verbanden tussen beide schoolvakken expliciteert: "*Leerlingen krijgen bijvoorbeeld de formules voor een eenparig versnelde beweging* $x = ½ at^2$ *en* $v = at$ *en bijna te flauw,* $a = a$. *Dan leg ik wel uit dat de ene de afgeleide is van de andere.* [...] *Maar ik vertel leerlingen er ook altijd bij dat we er anders mee omgaan bij natuurkunde. Bij wiskunde krijg je de formule, dan moet je hem differentiëren en de afgeleide op nul stellen en maxima berekenen en wat al nog maar meer. Wij trekken raaklijnen, wij tellen hokjes. Het is hetzelfde. Het stelt hetzelfde voor, maar de techniek die je gebruikt, de manier waarop je er mee omgaat is anders*" (zie ook Vos e.a., 2010)
Wiskundedocent B heeft zowel een wiskunde- als natuurkundebevoegdheid, maar geeft alleen wiskunde. Hij vindt relaties tussen wiskunde en natuurkunde belangrijk. Hij zegt bijvoorbeeld: "*Normaal in vwo laat ik een aantal keer zien dat de eerste afgeleide de snelheid is en de tweede afgeleide de versnelling*." Ook bij het onderwerp integreren legt docent B dergelijke relaties. Hij zegt daarover: "*In vwo 6 ben ik met arbeid bezig en potentiële energie, afgelegde weg, verplaatsing, en dan doen we dat allemaal met integreren. Dan gaat er een wereld voor hen open. En dan met de vuist op tafel slaan: 'waarom zitten we hokjes te tellen?'*"
Hoewel docent B vertelt dat hij dergelijke relaties tussen wiskunde en natuurkunde legt, maakt hij ook duidelijk dat hij veel nadruk legt op de technieken van het integreren en differentiëren.

Samenvatting onderwijscontext school B

Voor interview 1 worden op school B bij geen van de drie schoolvakken aspecten en procedures van het concept afgeleide behandeld. Alleen het aspect 'richtingscoëfficiënt' is bij wiskunde behandeld. Tussen interview 1 en interview 2 volgt bij wiskunde de introductie van de differentiaalrekening, waarbij veel procedures en aspecten van het concept afgeleide naar voren komen met veel nadruk op het uitvoeren van regels voor differentiëren. Bij economie wordt in deze periode micro-economie behandeld en bij natuurkunde komen onderwerpen uit de kinematica en mechanica aan bod.

Tussen interview 2 en interview 3 zijn bij economie en natuurkunde in deze periode geen onderwerpen gepland die raakvlakken hebben met het concept afgeleide, terwijl bij wiskunde de differentieerregels worden uitgebreid naar andere typen functies. Tussen interview 3 en interview 4 wordt bij wiskunde aan de hand van extra materiaal geoefend met examenopdrachten waarbij symbolisch wordt gedifferentieerd. Bij economie en natuurkunde vindt herhaling plaats van respectievelijk micro-economie en mechanica. Ook bij het hoofdstuk over radioactief verval komen aspecten van het concept afgeleide terug.

Afstemming tussen schoolvakken vindt op school B niet structureel plaats. Door individuele initiatieven proberen docenten van natuurkunde, wiskunde en economie soms aan te sluiten op voorkennis die bij een ander schoolvak is opgedaan. Met name de natuurkundedocenten F en G en wiskundedocent B geven voorbeelden van de manier waarop zij soms relaties tussen wiskunde en natuurkunde verduidelijken. Uit reacties van docent G blijkt dat hij, omdat hij beide vakken onderwijst, goed op de hoogte is van het curriculum van beide schoolvakken.

5.4 Vergelijking van de onderwijscontext van de scholen A en B

In deze paragraaf worden de verschillen en overeenkomsten tussen beide scholen beschreven in het onderwijs van het concept afgeleide. Dit betreft de planning van de leerstof, het gegeven onderwijs in het concept afgeleide en de afstemming tussen schoolvakken.

Planning van het onderwijs in het concept afgeleide

Een verschil tussen school A en B is de planning van de vakken natuurkunde en economie. In school A zijn voor interview 1 bij natuurkunde in vwo 4 diverse procedures en aspecten van het concept afgeleide behandeld, zoals formules voor eenparig versnelde bewegingen en het bepalen van gemiddelde en momentane snelheid op basis van een grafiek. Ook bij economie op school A wordt in vwo 4 nadruk gelegd op de wiskundige kant van de micro-economie en worden aspecten als marginale kosten en het differentiëren van polynomen gebruikt. Op school B wordt natuurkunde in vwo 4 niet aangeboden. Wel volgen alle leerlingen verplicht economie. Bij de vakken natuurkunde (klas 3) en economie zijn geen procedures of aspecten van het concept afgeleide behandeld. In dit onderzoek blijkt deze planning vooral gevolgen te hebben voor de resultaten van interview 1.

Een tweede verschil betreft de planning van de leerstof over differentiaalrekening. De keuze van school A is de differentiaalrekening niet te introduceren in vwo 4. In vwo 5 wordt zowel het introducerende als het vervolghoofdstuk behandeld. Deze introductie van de differentiaalrekening is gecomprimeerd tot één periode van vier weken. Op school B heeft een brede introductie van de differentiaalrekening plaatsgevonden in vwo 4, gevolgd door oefening op de techniek van het differentiëren. De theorie krijgt een vervolg in vwo 5.

De inhoud van het onderwijs in het concept afgeleide

Op beide scholen wordt bij de introductie van de differentiaalrekening een variatie aan aspecten en procedures van het concept afgeleide genoemd en gebruikt. De rekenregels voor het differentiëren worden afgeleid met de limietdefinitie.
De verschillen zitten in het vervolg van de differentiaalrekening. Op school A wordt de lijn van het boek gevolgd, waarbij meer nadruk komt te liggen op symbolische procedures. Tegelijkertijd blijft de grafische representatie een rol spelen. Kenmerkend voor de werkwijze van docent B op school B is dat er in eerste instantie veel geoefend wordt op de regels voor het differentiëren van functies. Pas daarna worden deze regels toegepast in situaties. Docent B legt nadruk op het trainen van technieken waarbij de leerlingen veel met formules moeten kunnen manipuleren.
Er is ook verschil zichtbaar tussen de beide scholen in het gebruik van de grafische rekenmachine. Op school A wordt de rekenmachine-optie dy/dx in vwo 5 geïntroduceerd en bij enkele opdrachten gebruikt. Op school B benadrukt de docent dat de rekenmachine alleen als controlemiddel gebruikt moet worden. Uit analyse van de schriften blijkt dat de rekenmachine-optie dy/dx bij de introductie van de differentiaalrekening niet is gebruikt. Docent B besteedt in vwo 6 bij de examentraining aandacht aan het verschil tussen exact oplossen en benaderen met de rekenmachine.

Afstemming tussen schoolvakken

Op beide scholen vindt geen structureel overleg plaats tussen docenten van de verschillende schoolvakken. Wel zijn er individuele initiatieven waarin docenten proberen aan te sluiten bij de voorkennis van een ander schoolvak of benoemen docenten relaties tussen schoolvakken. Deze individuele initiatieven variëren van het vragen naar voorkennis van een ander vak tot individueel overleg met collega's van een andere sectie. Vooral de wiskundedocent B en de natuurkundedocenten F en G leggen verbanden tussen wiskunde en natuurkunde. Dit is in de aantekeningen van leerlingen terug te vinden. Docent G maakt duidelijk dat hij, doordat hij beide vakken wiskunde en natuurkunde geeft, goed op de hoogte is van overeenkomsten en verschillen tussen de beide vakken.

Hoofdstuk 6 Resultaten: beschrijving van de casussen

In de hoofdstukken 6 en 7 worden de resultaten van het onderzoek beschreven. Hoofdstuk 6 beschrijft de tien individuele casussen in alfabetische volgorde. In hoofdstuk 7 volgt de synthese van de resultaten.
Met de beschrijvingen van de individuele casussen in hoofdstuk 6 wordt, ten eerste, per leerling een beeld geschetst van de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. Ten tweede kunnen door deze beschrijvingen de casussen met elkaar vergeleken worden voor een cross-case-analyse. Ten derde maken gedetailleerde casusbeschrijvingen de conclusies van dit onderzoek navolgbaar.

De beschrijving van elke casus bestaat uit vijf subparagrafen. In de eerste subparagraaf wordt de betreffende leerling gekarakteriseerd op basis van uitspraken van de leerling over zichzelf en van de wiskundedocenten over de leerling. In de tweede subparagraaf worden de uitspraken en handelingen van de leerling beschreven bij de opdrachten *Watertanks-b* en *Benzine*. Deze twee opdrachten zijn gekozen omdat ze in de opeenvolgende interviews herhaald zijn uitgewerkt door de leerlingen. Daarnaast geven de uitspraken en handelingen bij één berekenopdracht en één redeneeropdracht samen een beeld van de ontwikkeling van de leerling. In de derde en vierde subparagraaf wordt de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid beschreven aan de hand van de twee deelvragen van het onderzoek. In de vijfde subparagraaf wordt per casus de hoofdlijn van de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid samengevat.

6.1 De ontwikkeling van Andy

6.1.1 Achtergrond van de leerling

Andy is een leerling die het profiel Natuur en Techniek heeft gekozen met als keuzevak aardrijkskunde. Aan het begin van het onderzoek deelt zijn wiskundedocente P hem in als gemiddelde leerling. Ze vindt het moeilijk een duidelijk oordeel over hem uit te spreken en zegt: "*Hij vraagt niet veel en onttrekt zich soms aan mijn waarnemingen*."
Twee jaar later in vwo 6 deelt dezelfde wiskundedocente Andy nog steeds in als gemiddelde leerling. Nog steeds vraagt hij niet snel uitleg aan de docent. Docente P zegt hierover: "*Hij denkt van binnen wel allerlei dingen, maar hij kan niet makkelijk zeggen wat hij aan het doen is en wat hij niet snapt*." Ook merkt ze op dat hij veel rekenfouten of fouten in algebraïsch werk maakt. Andy geeft zelf in interview 1 aan dat hij beter is in de vakken uit de natuurprofielen en dat hij slecht presteert in talen. Volgens hem is natuur-

kunde één van zijn betere vakken. Het lukt hem naar zijn zeggen goed om formules toe te passen. Hij omschrijft zijn studiehouding in interview 1 als "*niet heel gemotiveerd, maar ook niet dat ik de kantjes er afloop*". Soms lukt het niet goed om huiswerk bij te houden, bijvoorbeeld bij wiskunde. Maar voor proefwerken leert hij wel goed, aldus Andy.
Hij is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B12 op het schoolexamen een 6,5 en op het centraal schriftelijk examen een 8,3.

6.1.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

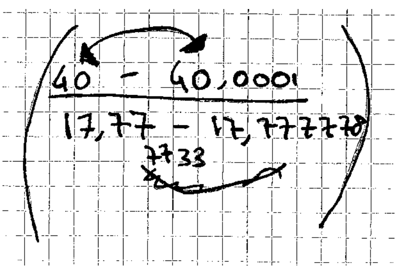
In tabel 6.1.1 wordt een samenvatting gegeven van Andy's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.1.1 Andy's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

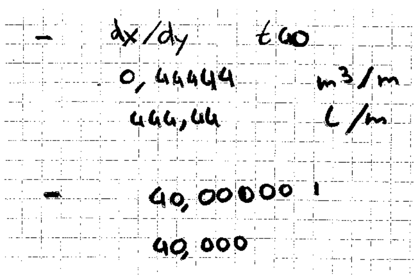
Interview 1, april 2006 Andy noemt als procedure de raaklijnmethode, waarbij hij refereert aan het schoolvak natuurkunde: "*Ja met de raaklijn, maar mag je alles wat je bij natuurkunde hebt geleerd hier gebruiken?*" Hij legt uit dat je niet twee punten van de grafiek mag nemen want "*dan zou je een andere hoeveelheid water per minuut eruit krijgen dan wanneer je een raaklijn tekent die wel dezelfde steilheid heeft als dit punt*". In deze uitspraak onderscheidt hij een antwoord op laag 2 (tussen twee punten) en laag 3 (steilheid in een punt), in de grafische representatie. In andere bewoordingen licht hij dit onderscheid nogmaals toe: "*Als je een punt hier* [wijst aan] *en een punt hier neemt, en je doet dat met delta y delen door delta x dan komt er iets anders uit* […] *dan wanneer je hier een raaklijn tekent. Het water stroomt er hier* [wijst punt aan] *minder snel uit, door de waterdruk.*" Andy tekent de raaklijn niet, maar denkt na over andere procedures. Eerst analyseert hij de gegeven formule, vervolgens benadert hij de uitstroomsnelheid met de intervalmethode. Hij neemt het interval van t = 40 tot t = 39, maar merkt op dat zijn berekening niet kan kloppen omdat $V(39)$ groter is dan $V(40)$. Als hij ziet dat t = 39 voor t = 40 ligt, en de grafiek daar hoger is, besluit hij nogmaals de intervalmethode toe te passen, maar nu op interval [40, 41]. Hij berekent dat er 364 liter per minuut uitstroomt. Omdat hij onzeker is of de raaklijnmethode in deze opdracht toegepast moet worden, gebruikt hij de intervalmethode om de gevraagde uitstroomsnelheid te berekenen.
Interview 2, november 2006 Andy plot de grafiek en berekent met de rekenmachine-optie dy/dx de waarde 0,444. Hij rekent dit met een kruistabel om naar 444 liter per minuut. Als de interviewer vraagt naar andere procedures, zegt hij: "*Ik had weer net als bij opdracht 1 een raaklijn kunnen tekenen.*" En verder: "*Ik kan, maar dat is bijna hetzelfde als ik net deed, met de rekenmachine twee punten dicht bij elkaar nemen, gewoon 40 en 40,001 of zo.*" Hij berekent op interval [40, 40,0001] het differentiequotiënt, maar deelt het horizontale verschil door het verticale verschil (zie figuur 6.1.1). Hij zegt: "*Deze methode weet ik niet zo goed, die zou ik normaal niet gebruiken.*" Daarna vervolgt hij: "*Het is een beetje dezelfde manier als met die dx dy; dy dx* (de rekenmachine-optie, GR) *alleen dan met de hand.*" Als hij een volgende opdracht maakt zegt hij dat hij de deling verkeerd om heeft uitgevoerd. Hij berekent dus de momentane uitstroomsnelheid (laag 3) zowel met de klein-interval-methode, de raaklijnmethode en de rekenmachine-optie dy/dx. Hij spreekt niet over differentiëren of afgeleiden.
Interview 3, mei 2007 Eerst zegt Andy: "*Dat kun je doen met een raaklijn.*" Hij tekent de raaklijn en berekent de richtingscoëfficiënt. Vervolgens meldt hij: "*Je kunt ook plotten en dan kun je met dx dy op*

t = 40 *de richtingscoëfficiënt uitrekenen*." Hij noteert dit ook als dx/dy (zie figuur 6.1.2) in plaats van dy/dx. Hij vergelijkt beide procedures door te concluderen dat de raaklijn minder precies is. Tenslotte legt hij uit dat je deze laatste manier ook "*met de hand kunt uitrekenen door 40,001 en 40 te nemen*". Hij zegt: "*Dat doet de rekenmachine ook, maar die doet het heel klein, die doet het met nog minder*." Hij verandert, terwijl hij dit laatste opmerkt, de 40,001 in 40,000001 (zie ook figuur 6.1.2). Hij noemt net als in het vorige interview drie laag 3-procedures om de momentane uitstroomsnelheid te berekenen, namelijk de raaklijnmethode, de klein-intervalmethode en de rekenmachine-optie dy/dx.
Interview 4, november 2007 Andy begint met de raaklijnmethode en vervolgt met de rekenmachine-optie dy/dx. Hij zegt en schrijft weer dx/dy in plaats van dy/dx. Differentiëren wordt door hem weer niet genoemd of gebruikt bij deze opdracht. Hij zegt nog: "*Je neemt op 40 een punt en op 40,001 neem je een punt* [wijst aan], *dat doet de rekenmachine eigenlijk ook, maar die doet het heel nauwkeurig*." Hij schrijft op 'dx/dy met de hand in punt 40 en 40,001'. Net als in de interviews 2 en 3 noemt en gebruikt hij dezelfde drie laag 3-procedures.

In interview 1 noemt Andy twee procedures: de raaklijnmethode en de intervalmethode. De raaklijnmethode is behandeld bij natuurkunde (zie tabel 5.1). Hij is niet zeker of hij deze procedure in deze opdracht mag toepassen. Ook legt hij in interview 1 in verschillende bewoordingen uit dat er een verschil is tussen de uitstroomsnelheid tussen twee punten en de uitstroomsnelheid op één punt. Hij onderscheidt daarbij laag 2 en laag 3 in de grafische representatie. Uiteindelijk berekent hij in interview 1 de uitstroomsnelheid met de intervalmethode.
Vanaf interview 2 gebruikt hij steeds dezelfde drie procedures, namelijk de raaklijnmethode, de klein-intervalmethode en de rekenmachine-optie dy/dx, die hij ook vaak dx/dy noemt (figuur 6.1.2). Hij vergelijkt de drie procedures in uitspraken waarin hij aangeeft dat de rekenmachine de waarde van dy/dx berekent door een klein interval te gebruiken en dat de raaklijn minder precies is dan de rekenmachine-optie dy/dx.
Van interview 1 tot 3 gebruikt hij steeds een kleiner interval in de klein-intervalmethode en hij noemt het limietproces als hij zegt dat de gevraagde uitstroomsnelheid nauwkeuriger wordt als het interval kleiner genomen wordt. In geen van de vier interviews noemt hij symbolisch differentiëren om de momentane uitstroomsnelheid te berekenen.



Figuur 6.1.1 Uitwerking intervalmethode (I-1)



Figuur 6.1.2 Aantekeningen bij *Watertanks-b* (I-3)

Tabel 6.1.2 Andy's werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Andy interpreteert de haakjesnotatie eerst als vermenigvuldiging. Als hem wordt gevraagd naar de betekenis van $V(a)$, bedenkt hij een uitleg, waarin hij de formule ziet als $(a + h - a)/\ h$. Hij zegt namelijk: "*Als je voor a een waarde kiest, 50 bijvoorbeeld, als je dan 3 kiest voor h, dan is het samen 53; dat doe je min 50; daar komt 3 uit en dan deel je door 3, dat is 1*." Hij vertelt dat de formule hem doet denken aan de formule voor de frequentie van het Dopplereffect.
Interview 3, mei 2007 Eerst zegt Andy: "*Vorige keer wist ik hem niet, en ik vind hem nog steeds lastig*." Het blijkt ook dat hij net als vorige keer moeite heeft met de interpretatie van de notatie. Hij zegt: "*Die h tel je er bij op, en je haalt dat er weer af; en dan deel je door h, dan zou er één uit komen*." Hij neemt nu voor a de waarde 20 en voor h de waarde 500. Hij interpreteert de formule voor a = 20 en h = 500 als $V(20) + V(500) - V(20)/\ 500$ dat is dus 39,7 / 500. Hij zegt dat "*het verbruik per kilometer er uit komt*", maar vraagt zich af waarom $V(a)$ in de formule voorkomt. Tenslotte zegt hij: "*Het gemiddelde verbruik per kilometer over 500 km*." Hij noemt geen aspecten van het concept afgeleide.
Interview 4, november 2007 Aan het begin van dit interview interpreteert Andy de notatie nog steeds onjuist, namelijk als $V(a) + h - V(a)$. Dan zegt hij: "*Maar nu bedenk ik in één keer dat misschien die h, als je hier 100 kiest* (voor a, GR) *en voor h bijvoorbeeld 20, dan wordt het* $V(120) - V(100)$." Daarna interpreteert hij de formule goed met een getallenvoorbeeld, a = 100 en h = 100. Hij wijst ook de punten bij a = 100 en a = 200 aan in de grafiek. "*Ik denk dat dit het verbruik per kilometer is,* […] *h is een waarde die je zelf kiest, en dat is hoeveel je extra rijdt*." Hij schrijft op (19 – 10) / 100 en komt op 9/100 verbruik per kilometer. Hij controleert door met 100 te vermenigvuldigen en zegt: "*Als je 100 km rijdt zou je dus 9 liter hebben verbruikt, en dat klopt dus ook weer*." Hij schrijft op: 'de formule geeft het verbruik weer'. De interviewer vraagt of de h nog uitmaakt. Andy reageert: "*Als je bijvoorbeeld h is 400 neemt dan bereken je het gemiddelde verbruik*." Hij verbetert nu de opgeschreven zin in 'gemiddeld verbruik'. De interviewer vraagt: "*Heb je de formule ooit eerder gezien?*" Hij antwoordt: "*Nee, ja, vorige keer*." Andy interpreteert de formule nu correct in termen van situatie, maar relateert de notatie nergens aan andere aspecten van het concept afgeleide.

In tabel 6.1.2 wordt Andy's werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Andy's interpretatie van de benzineformule wordt in interview 2 gehinderd doordat hij eerst $V(a + h)$ als vermenigvuldiging ziet. In interview 3 interpreteert hij de formule als $\frac{V(a)+V(h)-V(a)}{h} = \frac{V(h)}{h}$. Deze laatste uitdrukking is volgens hem het gemiddelde verbruik, maar hij begrijpt naar zijn zeggen niet waarom $V(a)$ in de formule voorkomt.
In interview 4 verwoordt hij dat hij *"in één keer bedenkt"* dat het gaat om $V(120) - V(100)$, in plaats van $V(100) + V(20) - V(100)$, zoals hij de formule tot op dat moment had geïnterpreteerd. Dit inzicht maakt dat hij de formule met behulp van een getallenvoorbeeld interpreteert als het verbruik per kilometer over de extra kilometers h. Hoewel hij uiteindelijk tot een correcte interpretatie van de benzineformule komt, relateert hij zijn uitleg niet aan andere aspecten van het concept afgeleide.

6.1.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.1.3 is weergegeven welke procedures Andy in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt. Op basis van deze tabel wordt aan de hand van de drie indicatoren (tabel 3.2) breedte en samenhang van Andy's repertoire beschreven.

Tabel 6.1.3 Door Andy gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●●○	●	●	●●○				●		
I-2	●	⭘		●⭘○	●●●●					
I-3	●	○	●	●○	●○		○			
I-4	●	○		●○	●●●	●⭘	●		●	

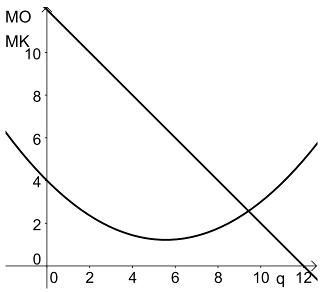
●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure
Uit tabel 6.1.3 blijkt dat Andy in de opeenvolgende interviews respectievelijk negen, negen, acht en elf maal een adequate procedure noemt of gebruikt. Zijn voorkeur gaat in alle interviews uit naar laag 2- en laag 3-procedures op basis van de grafiek of de tabel. Hij kiest slechts zelden voor symbolisch differentiëren. In interview 3 noemt hij één keer de mogelijkheid van symbolisch differentiëren. In interview 4 past hij dit slechts één keer toe in *Monopolie*, de laatste opdracht van het interview.
De rekenmachine-optie dy/dx (kolom 5) speelt vanaf interview 2 een centrale rol. Hij zoekt bijvoorbeeld in interview 2 het punt waar de twee tanks dezelfde uitstroomsnelheid hebben door een 'gegokte' raaklijn te plotten. Deze raaklijn lijkt de grafiek van het watervolume bij t = 60 te raken waarna Andy controleert met de rekenmachine-optie dy/dx of de uitstroomsnelheid bij t = 60 inderdaad 333 liter per minuut is. Ook bij de opdracht *Monopolie-b* voert hij de optie dy/dx in allerlei punten van beide grafieken uit om te onderzoeken waar de toename gelijk is.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire
Andy gebruikt voor de opdracht *Watertanks-b* vanaf interview 2 drie procedures (zie tabel 6.1.1 en bijlage D) en er is geen verandering in de gebruikte procedures. Dat is wel het geval bij de opdrachten *Kogel* en *Monopolie-a* waarbij het repertoire zich uitbreidt van interview 2 naar interview 4 (zie bijlage D). Daartegenover staat een opmerkelijke achteruitgang bij de opdracht *Watertanks-c*, waar hij in interview 4 de snijpunten gaat berekenen in plaats van de punten met gelijke uitstroomsnelheid.

Wat betreft het gebruik van procedures tijdens één interview: in interview 2 beperkt hij zich tot vier procedures, terwijl hij in interview 4 zeven verschillende procedures noemt of gebruikt. Hieruit blijkt dat het repertoire breder is geworden bij dezelfde opdrachtenset. Procedures waarmee hij zijn repertoire uitbreidt zijn het interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie en het gebruiken van een natuurkundeformule (procedure 6 en 9). Procedure 6 licht ik hieronder toe.

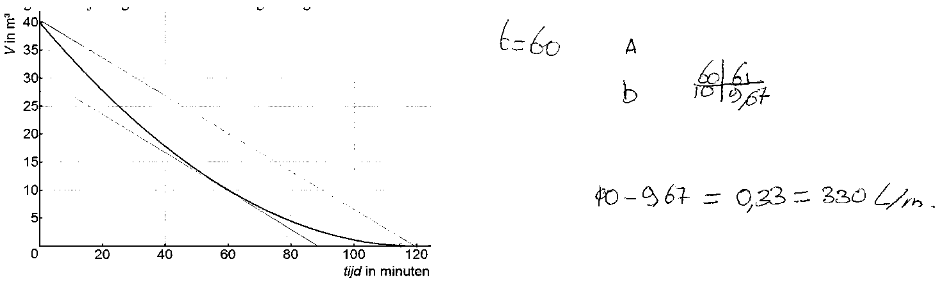
In interview 4 plot Andy bij de opdracht *Monopolie-a* de grafiek van TK′ om het punt te vinden waar de totale kosten het minst toenemen. Ook bij de opdracht *Monopolie-b* plot hij de grafieken van de afgeleiden TK′ en TO′ om het moment van gelijke toename te vinden. Hij verwart vervolgens de grafiek van TK′ en de totale kosten zelf, want over de geplotte grafieken van TK′ en TO′ (zie figuur 6.1.3) zegt hij in interview 4: “*Ze moeten even snel toenemen, maar bij die ene daalt hij en bij die andere stijgt hij. Dus dat is niet een punt waarbij ze allebei toenemen.*”



Figuur 6.1.3 Plot van TO′ en TK′ (I-4)

Indicator 1.3 De samenhang van het repertoire

Andy gebruikt vanaf interview 2 twee procedures vaak naast elkaar (zie bijlage D), namelijk de raaklijnmethode en de rekenmachine-optie dy/dx. Bij de opdracht *Watertanks-b* combineert hij deze twee procedures met de klein-intervalmethode. Dat de raaklijnmethode en de klein-intervalmethode beide de verandering op één moment beschrijven gebruikt hij al vanaf interview 1 (zie figuur 6.1.4).



Figuur 6.1.4 Raaklijnmethode en intervalmethode bij *Watertanks-c* (I-1)

Vanaf interview 2 noemt Andy expliciet de relatie tussen de rekenmachine-optie dy/dx en de klein-intervalmethode als hij zegt dat de rekenmachine gebruik maakt van de klein-intervalmethode (zie interviews 2, 3 en 4 in tabel 6.1.1). De rekenmachine-optie dy/dx krijgt Andy's voorkeur en vervangt de klein-intervalmethode, omdat hij deze optie nauwkeuriger vindt. In de laatste opdracht van interview 4 legt hij ook de relatie tussen de rekenmachine-optie dy/dx en symbolisch differentiëren door een symbolisch berekend antwoord te controleren met de optie dy/dx.
Hij legt ook relaties tussen procedures die hij geleerd heeft bij wiskunde en bij natuurkunde als het gaat om de raaklijnmethode, maar niet bij het gebruik van natuurkundeformules. Dit wordt hieronder toegelicht.
In interview 1 gebruikt hij voor het eerst de raaklijnmethode. Hij vertelt dat hij deze bij natuurkunde heeft geleerd. Het is voor hem niet vanzelfsprekend deze methode ook in een tijd-volume situatie in te zetten. Dat blijkt uit zijn uitspraak in interview 1: "*Ja met de raaklijn, maar mag je gewoon alles wat je bij natuurkunde hebt geleerd hier gebruiken?*" In de interviews 2, 3 en 4 gebruikt hij meerdere keren de raaklijnmethode, maar hij noemt het niet meer een 'natuurkundemethode'.
Andy probeert natuurkundeformules te gebruiken als in een opdracht gevraagd wordt de versnelling te berekenen. Hij weet dan echter niet de juiste formule te noemen. Hij gebruikt bijvoorbeeld formules als $a = s \cdot t^2$ (I-1) en $a = \frac{1}{2} v \cdot t^2$ (I-3). In interview 4 gebruikt hij bij de opdracht *Kogel* de correcte formule $v = g \cdot t$ maar dan zegt hij "*Deze formule is bijna hetzelfde als v is s keer t, of nee ik weet het niet.*" Uit deze uitspraak blijkt dat hij het verband tussen de natuurkundeformules niet duidelijk kan verwoorden en de natuurkunde-formules geïsoleerd van andere procedures gebruikt.

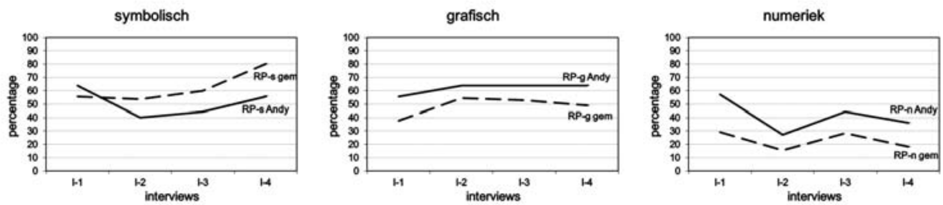
Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
Andy gebruikt in interview 1 meerdere laag 2- en laag 3- procedures, vooral raaklijn- en intervalmethoden. Vanaf interview 2 voegt hij daar de rekenmachine-optie dy/dx aan toe die bij meerdere opdrachten de intervalmethoden vervangt. Deze rekenmachine-optie en de raaklijnmethode vormen vanaf interview 2 de centrale procedures in zijn repertoire en relateert hij steeds sterker aan elkaar. De breedte en de samenhang van het repertoire nemen vanaf interview 2 tot en met interview 4 steeds verder toe.
Symbolisch differentiëren noemt of gebruikt Andy tot en met interview 4 incidenteel en lijkt nauwelijks gerelateerd aan andere procedures. Alleen in de laatste opdracht van interview 4 legt hij een relatie tussen de rekenmachine-optie dy/dx en symbolisch differentiëren. Natuurkundeformules functioneren in de interviews 3 en 4 geïsoleerd van andere procedures.

6.1.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Aan de hand van twee indicatoren (tabel 3.2) wordt Andy's bekwaamheid beschreven in het gebruik van representaties en het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide.

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

In figuur 6.1.5 is zichtbaar dat Andy vooral de grafische en numerieke representatie gebruikt: RP-g en RP-n zijn in elk interview bovengemiddeld. De voorkeur voor de grafische en numerieke representatie blijft in de opeenvolgende interviews bestaan. De rol van de symbolische representatie is beperkt. Hij gebruikt in veel gevallen de formule enkel om een functiewaarde te berekenen om vervolgens via een numerieke of grafische methode verder te werken. Andy blijkt de symbolische representatie in de opdracht *Benzine* in de interviews 2 en 3 niet goed te kunnen interpreteren. Hetzelfde geldt voor de notatie $R'(80)$ bij de opdracht *Remweg* in interview 2.



Figuur 6.1.5 Verloop van de representatiepercentages van Andy

In interview 4 komt hij wel tot een goede interpretatie van de symbolisch gepresenteerde benzineformule, mede door een getallenvoorbeeld grafisch te interpreteren. Het interpreteren van $R'(80)$ lukt in interview 4 nog steeds niet. Hij legt in interview 4 bij deze opdracht voor het eerst de link met de grafische representatie door te zeggen: *"Als je dat doet met de afgeleide, dan komt de steilheid op dat moment eruit,* [...] *de richtingscoëfficiënt."* In interview 4 lukt het Andy dus iets beter de symbolische representatie te koppelen aan de grafische en numerieke representatie, maar RP-s blijft onder het gemiddelde van de tien leerlingen, ook omdat hij zelden gebruik maakt van symbolisch differentiëren.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

In alle interviews noemt Andy in zijn redeneringen weinig aspecten (zie tabel 6.1.4). Het is daardoor soms niet duidelijk op basis van welk aspect hij tot een bepaalde procedure besluit. Daarnaast redeneert hij vaak in de beschreven situatie zonder daarbij aspecten van het concept afgeleide te noemen. Bij de benzineformule (tabel 6.1.2) legt hij bijvoorbeeld de betekenis in termen van de beschreven situatie uit, maar aspecten van het concept afgeleide noemt hij niet. En in interview 2 zegt hij naar aanleiding van de notatie $R'(80)$: *"het heeft* *iets met de afgeleide te maken"*, om vervolgens alleen te spreken over tijd, meters en kilometer per uur.

Tabel 6.1.4 Het aantal door Andy genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	1			1			
I-2	1						
I-3			2		1		
I-4	1		1	1		1	

Bij berekenopdrachten lijken grafische aspecten, zoals 'steilheid' of 'richtings-coëfficiënt' Andy vooral te beïnvloeden in het kiezen van een procedure. Bij de opdrachten *Watertanks*, *Tikkerband* en *Monopolie* in de interviews 2, 3 en 4 maakt hij bijvoorbeeld de opmerking: *"Dat doe ik weer met de raaklijn, net als bij de vorige som*." Hij noemt daarmee een grafische procedure, maar expliciteert niet waarom hij voor de raaklijn kiest.
In de interviews 3 en 4 relateert Andy ook aan redeneeropdrachten grafische aspecten zoals 'steilheid' en 'richtingscoëfficiënt'. Bij het interpreteren van de notatie TK′(20) in interview 3 zegt hij: "*Als je twintig invult dan weet je de richtingscoëfficiënt, de toename van de totale kosten op dat punt*." In interview 4 legt hij bij de opdracht *Remweg* voor het eerst een relatie tussen de notatie R′ en 'richtingscoëfficiënt' en 'steilheid'. Incidenteel wordt ook een ander aspect genoemd zoals 'toename' of 'snelheid'.
Er is geen sterke ontwikkeling te constateren in de zin dat Andy in de opeenvolgende interviews meer aspecten gaat gebruiken en aan elkaar gaat relateren. Andy redeneert vaak in termen van de beschreven situatie.

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Andy toont vanaf interview 1 een voorkeur voor de grafische en de numerieke representatie, die hij ook met elkaar in verband brengt. Deze voorkeur blijft in de opeenvolgende interviews bestaan terwijl hij de symbolische representatie zelden gebruikt. Hoewel hij in de interviews 3 en 4 de notatie van een afgeleide interpreteert met grafische aspecten zoals 'richtingscoëfficiënt' en 'steilheid' blijkt de koppeling tussen de symbolische representatie en grafisch-numerieke representaties niet sterk.
Andy noemt niet veel aspecten van het concept afgeleide en redeneert vaak in termen van de beschreven situatie, vooral bij redeneeropdrachten. Hoewel hij bij berekenopdrachten al vanaf interview 1 bij verschillende opdrachten dezelfde adequate procedures kiest, verwoordt hij geen overeenkomende aspecten.

6.1.5 De ontwikkeling van Andy's wiskundige bekwaamheid

Andy gebruikt vanaf interview 1 diverse procedures zoals de raaklijnmethode en intervalmethoden. Hierin blijkt zijn voorkeur voor de grafische en numerieke representatie. Vanaf interview 2 vervangt hij de numerieke intervalmethode door de rekenmachine-optie dy/dx. Deze optie en de raaklijnmethode zijn vanaf interview 2 voor hem de centrale procedures. Hij breidt zijn repertoire niet uit met symbolisch differentiëren of natuurkundeformules, op een incidenteel gebruik ervan na. Hij noemt in alle interviews weinig aspecten van het concept afgeleide, maar in de interviews 3 en 4 gaat hij in redeneeropdrachten wel grafische aspecten als 'steilheid' en 'richtingscoëfficiënt' gebruiken om formules te interpreteren.
Andy's werk kenmerkt zich door de centrale rol van de grafische rekenmachine en tevens door het beperkte gebruik van symbolisch differentiëren. Hij verwoordt vaak niet waarom hij voor bepaalde procedures kiest maar redeneert bij de meeste opdrachten in termen van de in de opdracht beschreven situatie.
Bij Andy is de ontwikkeling vooral zichtbaar in toenemende breedte en samenhang van zijn repertoire, maar dan vooral grafische en numerieke laag 2- en 3-procedures. Het gebruik van laag 4-procedures, gebaseerd op symbolisch differentiëren, neemt nauwelijks toe. De ontwikkeling in het verwoorden van aan elkaar gerelateerde aspecten is beperkt. Wel kiest Andy bij verschillende berekenopdrachten dezelfde procedures zonder expliciet te noemen op basis van welk aspect hij dit doet.

6.2 De ontwikkeling van Bob

6.2.1 Achtergrond van de leerling

Bob is een jongen die het profiel Natuur en Techniek heeft gekozen met als keuzevak economie. Aan het begin van dit onderzoek beoordeelt wiskundedocente Q van vwo 4 hem als een goede leerling en zegt over hem: "*Hij heeft veel inzicht en is vaak bezig met het waarom van dingen; hij gebruikt vaak een verrassende aanpak die niet in de les is aangeleerd of in het boek staat*."
Bob zegt zelf dat hij graag wil weten hoe dingen in elkaar zitten. Hij vindt om die reden natuurkunde een interessant vak.
Over de studiehouding merkt docente Q in vwo 4 op dat hij "*slordig werkt en een chaotisch schrift heeft*". Uit Bobs uitspraken blijkt dat hij zich herkent in deze opmerking. De wiskundedocente van vwo 6, docente P, deelt hem in als goede leerling en noemt hem "*slim, maar wel wat slordig*".
Bob zegt over zijn studiehouding voor het vak wiskunde in interview 1: "*Als het even slecht gaat, dan moet ik er wat harder aan trekken en dan komt het weer goed*."

Bob is geslaagd met op zijn schoolexamen wiskunde-B12 een 7,0 en op het centraal schriftelijke examen een 7,6.

6.2.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

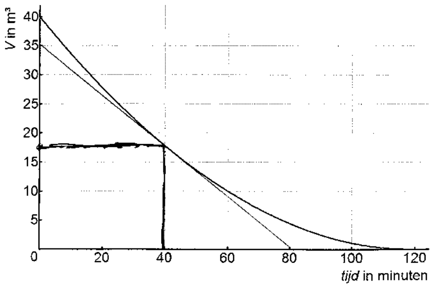
In tabel 6.2.1 wordt een samenvatting gegeven van Bobs werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.2.1 Bobs werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

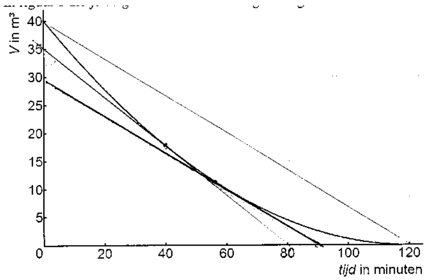
Interview 1, april 2006 Bob begint zijn uitwerking van deze opdracht met twee onjuiste procedures. Eerst denkt hij dat het antwoord rechtstreeks af te lezen is uit de grafiek. Dan zegt hij dat de snelheid te berekenen is met een rechthoek onder de grafiek (figuur 6.2.1). Hij legt dit uit: "*Ja, als dit de snelheid–tijd grafiek was, dan was dit de afstand* [wijst naar de rechthoek]." Om zijn antwoord te controleren zegt hij: "*Wacht, het leek me wel een plan als ik nou eens even een raaklijn ging tekenen*; *dat kan ik me ergens vaag herinneren,* [...] *volgens mij heb je dan de gemiddelde snelheid op dat punt.*" Hij tekent de raaklijn en berekent de richtingscoëfficiënt ervan, namelijk 0,4375. Hij evalueert deze drie procedures en kiest voor de raaklijnmethode: "*Ja, de snelheid op een punt was met een raaklijn, dat weet ik bijna zeker*." Ter controle plot hij nog de grafiek van Y = 0,4375X. Deze blijkt de grafiek van V precies bij t = 40 te snijden (dat is overigens toeval, GR). De uitwerking van deze opdracht kenmerkt zich doordat hij meerdere procedures toepast, waarvan één adequate. Hij kiest uiteindelijk voor deze procedure: het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
Interview 2, november 2006 Bob zegt: "*Nou dan ga ik gewoon weer een raaklijn tekenen*." Bob tekent de raaklijn en controleert dat "*hij in 80 minuten 35 kuub doet; dus dan doet hij in één minuut 35 gedeeld door 80, is 0,4375 kuub*". Hij rekent dit om naar 437,5 liter per minuut. Als de interviewer vraagt of hij zijn antwoord kan controleren zegt hij dat hij misschien een formule voor de raaklijn moet maken en daar vervolgens 40 invullen. Hij zegt: "*Volgens mij moet ik de richtingscoëfficiënt van deze grafiek hebben, en dan moet je deze hoek weten*." Hij geeft daarbij de hoek aan tussen de raaklijn en de y-as (figuur 6.2.2). Volgens hem heb je daarvoor de overstaande zijde en de aanliggende zijde nodig. Als je de richtingscoëfficiënt hebt, kun je t = 40 in de raaklijn invullen, aldus Bob. Hij lost de opdracht dus correct op met de raaklijnmethode. Hij relateert aan deze opdracht het aspect 'richtingscoëfficiënt' en daaraan gekoppeld het begrip 'hoek'. De controle met een hoek en een formule van de raaklijn is echter niet adequaat.
Interview 3, mei 2007 Bob zegt na het lezen van de opdracht: "*Dan gaat het weer om de steilheid van die lijn zeg maar, dan moet ik een afgeleide doen van die formule, alleen het punt is, we zijn helemaal niet met afgeleiden bezig*." Hij berekent de afgeleide zonder kettingregel en komt op $V'(40)$ = 26,67. Hij plot nu de grafiek van V en de afgeleide functie V' en vraagt zich aan de hand van de grafiek van V' af of zijn afgeleide functie wel klopt. Als de interviewer vraagt het antwoord te controleren zegt hij: "*Ik kan hier een raaklijn tekenen, wat ik de vorige paar keer ook had gedaan, maar nu hebben we de afgeleide gehad*." Volgens Bob zou dit weer 26,67 opleveren, "*maar dan iets minder precies*". Als derde procedure beschrijft hij de klein-intervalmethode op het interval [40; 40,001] en zegt hierover: *Dat is met limieten, volgens mij, dat is ongeveer hetzelfde als afgeleiden, want dan krijg je dat die 40 min 0, dat is dan verwaarloosbaar zeg maar*." Hij berekent met de klein-intervalmethode een uitstroomsnelheid van 445 liter per minuut. Dit lijkt hem een beter antwoord dan de 26 kubieke meter die hij met de

afgeleide heeft gevonden. Hij berekent dus de uitstroomsnelheid met symbolisch differentiëren en de klein-intervalmethode, en noemt ook nog de raaklijnmethode. Hij relateert deze procedures in zijn redenering ook aan elkaar. Bovendien plot hij de grafiek van de afgeleide.
Interview 4, november 2007 Bob beredeneert waarom hij hier de afgeleide kan gebruiken: "*Het gaat om de snelheid, dus dan moet ik de richtingscoëfficiënt van dat punt hebben, van de raaklijn zeg maar*, *en eigenlijk differentiëren denk ik*." De interviewer vraagt waar hij over nadenkt en hij antwoordt: "*Nou ik weet nog niet, omdat ik steeds een raaklijn tekende maar volgens mij kan ik beter die afgeleide van die formule bepalen. En dan heb ik de snelheidsformule en dan kan ik daar t invullen*." Hij voert deze berekening uit en komt op 444 liter per minuut. Hij voert de raaklijnmethode deze keer niet uit, maar zegt wel dat hij met de rekenmachine ook een numerieke afgeleide kon berekenen. Hij weet echter niet meer hoe hij dit precies kon invoeren. Hij berekent dus de uitstroomsnelheid met symbolisch differentiëren. Hij gebruikt geen andere procedures, maar noemt wel de raaklijnmethode en een rekenmachine-optie.

Bob noemt in interview 1 eerst twee onjuiste procedures, waarna hij kiest voor de raaklijnmethode (figuur 6.2.1). Nadat hij de raaklijnmethode heeft toegepast, controleert hij met een niet-adequate procedure, die toevallig wel zijn gevonden antwoord bevestigt. In interview 2 begint hij met de raaklijnmethode. Om het antwoord te controleren suggereert Bob met behulp van de hoek tussen de raaklijn en de *V*-as de richtingscoëfficiënt te berekenen (figuur 6.2.2). In deze beide interviews blijkt hij meerdere procedures toe te passen waarvan slechts één adequaat is.



Figuur 6.2.1 tekening bij *Watertanks-b* (I-1)



Figuur 6.2.2. tekening bij *Watertanks-b* en *c* (I-2)

In interview 3 gebruikt hij voor het eerst symbolisch differentiëren (zonder kettingregel) en de klein-intervalmethode, terwijl hij ook de raaklijnmethode nog steeds noemt. Hij gebruikt of noemt dus drie adequate procedures. In interview 4 voert hij symbolisch differentiëren voor het eerst accuraat uit en noemt hij ook weer de raaklijnmethode en deze keer een rekenmachine-optie.
Kortom, in de interviews 1 en 2 past hij de raaklijnmethode toe en daarnaast andere, onjuiste, procedures. In de interviews 3 en 4 blijft hij meerdere procedures noemen en gebruiken, maar nu zijn de gekozen procedures wel

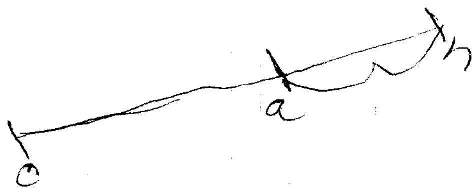
adequaat. Vanaf interview 2 noemt Bob vooral de aspecten 'steilheid' en 'richtingscoëfficiënt'.

Tabel 6.2.2 Bobs werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Bob interpreteert de formule na enige tijd als: "*Misschien kun je hier zeg maar het verbruik dat je hebt gedaan…*[…]*, het zou zelfs het verbruik in liter per km kunnen zijn*." Hij neemt een voorbeeld en stelt a = 40. Hij zegt: "*Dan krijg je hier dus het verbruik 40, en hier is het verbruik 40 plus een bepaalde waarde*." Daarna zegt hij dat het om gemiddeld verbruik in liter per kilometer gaat.
Interview 3, mei 2007 Bob zegt eerst dat het om het verbruik over een bepaalde afstand gaat. Hij onderzoekt dit met een getallenvoorbeeld, door naar het verbruik op het traject van 200 naar 300 kilometer te kijken. Op basis van dit voorbeeld zegt hij: "*Het is het verbruik tussen twee punten van de afgelegde weg,* […] *hoeveel hij verbruikt heeft terwijl hij die 100 kilometer aflegt*." Hij zegt dat de formule zoiets is als V eind min V begin gedeeld door de afgelegde weg. Dan zegt hij: "*Ja ik denk eigenlijk nog dat dit zelfs het gemiddeld verbruik is. Want als je het verbruik terwijl hij zoveel kilometer aflegde weet, dan zou het het gemiddeld verbruik zijn, per kilometer*." Hij interpreteert dus de formule eerst als het verbruik tussen twee punten, maar vervolgens als het gemiddeld verbruik per kilometer. Bob interpreteert de formule binnen de beschreven situatie en relateert aan de formule geen andere aspecten van het concept afgeleide.
Interview 4, november 2007 In eerste instantie interpreteert Bob de formule als $V(h)/h$. Hij verandert dit vervolgens, omdat al a km is afgelegd. Hij tekent vervolgens een lijn (figuur 6.2.3), geeft het stuk van a tot h aan en zegt: "*Het is in dit stuk het verbruik per kilometer*". Hij noemt voorbeelden zoals "*hoeveel hij van 50 tot 100 of van 400 tot 500 per kilometer verbruikt heeft*". De interviewer vraagt naar de rol van de h. Bob zegt: "*Ik denk dat het heel vaak één is, dan heb je zeg maar het verbruik op het moment; dat is nauwkeuriger*." En daarna: "*Ja dan weet je hoeveel hij verbruikt, stel je kiest a is 400, dan weet je hoeveel hij verbruikt van 400 tot 401, ongeveer het verbruik op 400 zeg maar. Daar zit een beetje zo'n limiet van wiskunde in, dan kun je h nog kleiner maken dan 0,001 of zo*." Als eindantwoord schrijft hij op: 'Het verbruik per km tussen a en h.' Bob interpreteert de benzineformule als het verbruik per kilometer en relateert de formule aan limieten zoals behandeld bij de introductie van de differentiaalrekening.

In tabel 6.2.2 wordt Bobs werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. In interview 2 interpreteert Bob de formule als het gemiddelde verbruik maar hij legt dit niet duidelijk uit. In interview 3 is de uitleg wel duidelijk aan de hand van een voorbeeld van een rit op het traject van 200 tot 300 kilometer.

In interview 4 kiest hij weer de interpretatie van 'verbruik per kilometer'. In alle interviews blijft hij dus binnen de situatie redeneren en interpreteert hij de benzineformule in termen van 'gemiddeld verbruik'. In interview 4 legt Bob ook expliciet de relatie met het limietproces zoals behandeld bij het concept afgeleide. Hij spreekt over het kiezen van h = 1, de mogelijkheid om "*h nog kleiner te maken dan 0,001 of zo*" en over "*zo'n limiet van wiskunde*". Dit limietproces is bij wiskunde alleen behandeld bij de introductie van de afgeleide functie.



Figuur 6.2.3 Tekening bij de opdracht *Benzine* (I-4)

6.2.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.2.3 is weergegeven welke procedures Bob in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.2.3 Door Bob gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1				●⭘				⭘		
I-2			⭘	●●●			⭘○	●	⭘	
I-3	●●	●	●	●●○			⭘○	●		⭘
I-4	○			○○	○	●●	●●●●○	●	●	

●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd. De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure

Bob gebruikt of noemt in de opeenvolgende interviews respectievelijk drie, acht, elf en dertien maal een adequate procedure. In interview 1 zijn dit alleen grafische procedures. De voorkeur voor grafische procedures blijft bestaan in interview 2. In interview 4 is het aantal adequaat gekozen procedures ten opzichte van interview 2 met vijf toegenomen. De centrale procedure wordt symbolisch differentiëren in combinatie met het interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie. Hij kiest in de interviews 1 en 2 ook veel niet-adequate procedures. Vanaf interview 3 neemt de keuze voor niet-adequate procedures af en in interview 4 lost hij vrijwel alle berekenopdrachten correct op.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire

Van interview 1 tot en met 3 is er een toename van het aantal verschillende procedures dat Bob gebruikt; van twee procedures in interview 1 naar zeven procedures in interview 3. In de interviews 1 en 2 gebruikt hij wel verschillende procedures, maar deze zijn deels niet adequaat. Een voorbeeld van dit laatste is zichtbaar bij de opdracht *Kogel*. Hij gebruikt in interview 2 vier procedures (zie bijlage D), namelijk:

- de raaklijnmethode, die hier tot een goede oplossing leidt;
- de oppervlakte onder de raaklijn, een oplossing die niet adequaat is;
- het gelijkstellen van natuurkundeformule voor kinetische en potentiële energie (figuur 6.2.4);
- het berekenen van een onjuiste afgeleide functie (figuur 6.2.5) waar hij verder geen berekening mee doet.

Bij dezelfde opdracht in interview 4 noemt en gebruikt hij vijf adequate procedures (bijlage D) waarvan hij drie accuraat uitvoert.

$$\cancel{m}gh = \tfrac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$9{,}81 \cdot 0{,}28 = \tfrac{1}{2}\ v^2$$
$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}28 \cdot 2} = 5{,}\ldots \text{ m/s}$$

Figuur 6.2.4 Natuurkundeformules om de opdracht *Kogel* op te lossen (I-2)

$$0{,}9 - 4{,}9t^2$$
$$0{,}9 - 4{,}9 \cdot 2t$$

Figuur 6.2.5 Onjuiste afgeleide bij de opdracht *Kogel* (I-2)

Bobs repertoire breidt zich uit van grafische procedures in interview 1 naar symbolische procedures en natuurkundeformules in interview 2. In interview 3 beschikt hij over een breed repertoire, bestaande uit laag 2-, 3- en 4-procedures en een procedure geleerd bij economie. Hij gebruikt namelijk een bij economie geleerde procedure bij de opdracht *Kosten-b*: "*Maximale winst, dat is* MO = MK*, weet ik nog; dus* MO *moeten we nog berekenen*. *Dat is de prijs keer de hoeveelheid delen door de hoeveelheid, dat is wel raar lijkt me*." De procedure is adequaat, maar de manier waarop hij MO wil berekenen is niet accuraat.

In interview 4 noemt of gebruikt hij opnieuw zeven verschillende procedures, maar de nadruk is, ten opzichte van dezelfde opdrachten in interview 2, geheel verschoven van grafische en numerieke laag 2- en 3-procedures naar laag 4-procedures gebaseerd op symbolisch differentiëren. Hij voert in dit interview grafische en numerieke procedures niet meer uit, maar noemt wel dat ze bruikbaar zijn om antwoorden te controleren.

Indicator 1.3. De samenhang van het repertoire

Bob noemt in interview 2 de relatie tussen symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode, maar verwoordt deze relatie niet duidelijk. Bij de hierboven genoemde opdracht *Kogel* in interview 2 zegt hij: "*Volgens mij moet ik dat doen met een raaklijn* […] *en eh ja volgens mij, bij wiskunde kon je een afgeleide*

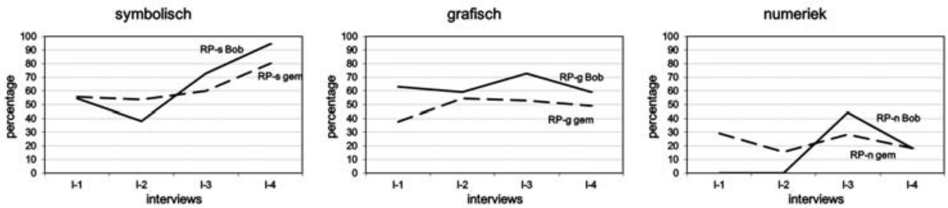
formule doen, alleen wat was dat ook al weer?" Volgens hem zijn er meerdere afgeleiden, een praktische en een theoretische. Bij de opdracht *Kogel* zou het om de praktische afgeleide gaan. Er was volgens hem ook een afgeleide met *x*-en; die was theoretisch en volgens Bob "*met parabolen van niet bestaande verschijnselen zeg maar*". Hij noemt in interview 2 verschillende procedures geïsoleerd van elkaar.
In interview 3 legt Bob sterker de relatie tussen de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren. Deze twee procedures combineert hij met de klein-intervalmethode. Zo lost hij de opdracht *Watertanks-b* op door $V'(40)$ te berekenen, weliswaar met een rekenfout, hij noemt de raaklijnmethode en controleert door de helling op interval [40; 40,0001] te berekenen. Over deze laatste procedure zegt hij in interview 3: "*Dat is in principe ongeveer hetzelfde als de raaklijn.*"
In interview 4 worden genoemde relaties tussen procedures nog sterker. Hij kan in interview 4 de raaklijnmethode, de intervalmethode en symbolisch differentiëren correct aan elkaar relateren. Daarnaast herkent hij in de opdracht *Kogel* in de gegeven formule de natuurkundeformule $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ en in de afgeleide $h'(t) = -9{,}8t$ de natuurkundeformule $v = g \cdot t$, waarmee hij bij natuurkunde geleerde formules relateert aan bij wiskunde geleerde procedures. Hij vult in interview 4 zijn repertoire aan met het plotten en interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie in de opdrachten *Monopolie* en *Kogel*. Bij de opdracht *Kogel* in interview 4 bijvoorbeeld plot hij de afgeleide Y2 = -9,8X. Hij kan deze grafiek in eerste instantie niet vinden in het venster van zijn grafische rekenmachine, maar dan ontdekt hij dat de grafiek onder de *x*-as ligt. Als Bob de grafiek in beeld heeft zegt hij dat het wel klopt, omdat bij deze valbeweging de *y*-waarde steeds meer negatief wordt. Hij leest nu de *y*-waarde –2,35 bij t = 0,24 af en schrijft als antwoord op 2,35 m/s. Hij interpreteert de vorm van de grafiek van h' goed in de beschreven situatie.

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
Ontwikkeling in breedte en samenhang van het repertoire is bij Bob op een aantal gebieden zichtbaar. Hij gebruikt in alle interviews meerdere procedures, maar in de eerste interviews zijn dit geïsoleerde procedures, waarvan sommige wel en andere niet adequaat zijn. In de interviews 3 en 4 relateert hij procedures steeds beter aan elkaar. In interview 4 verschuift het repertoire van laag 2- en 3- naar laag 4-procedures. Ook natuurkundeformules en wiskundeprocedures gebruikt hij naast elkaar in de interviews 3 en 4. Procedures geleerd bij economie gebruikt hij wel, maar zijn uitleg hierover klopt niet geheel.

6.2.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

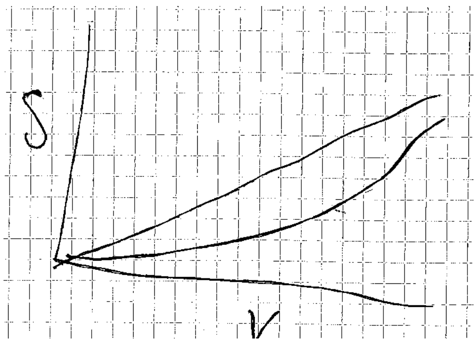
Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

In figuur 6.2.6 is zichtbaar dat Bob in de interviews 1 en 2 vooral de grafische representatie gebruikt. Dit is bijvoorbeeld zichtbaar bij de opdracht *Watertanks-b* (tabel 6.2.1). Hij vindt een antwoord met een raaklijn, verwoordt dat hij ook de richtingscoëfficiënt van de grafiek zou kunnen gebruiken en geeft aan dat die te vinden is als de hoek tussen raaklijn en *y*-as. In de redeneeropdrachten *Remweg* en *Benzine* in interview 2 interpreteert Bob de gegeven formules in termen van de situatie zonder ze in grafische of numerieke termen te vertalen.



Figuur 6.2.6 Verloop van de representatiepercentages van Bob

In de interviews 3 en 4 blijft de grafische representatie boven het gemiddelde. Dat hij grafisch blijft werken, blijkt nu ook in de redeneeropdrachten *Remweg* en *Benzine*: om betekenis te geven aan de gegeven notaties probeert Bob de situatie voor zichzelf te verduidelijken met een grafiek (figuur 6.2.7).



Figuur 6.2.7 Bobs grafiek bij de opdracht *Remweg-b* in interview 4

Tegelijkertijd is er in de interviews 3 en 4 een sterke toename van het gebruik van formules en komt de symbolische representatie meer in zijn uitwerkingen naar voren. In interview 4 relateert Bob vaak de symbolische en de grafische representatie aan elkaar.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

In tabel 6.2.4 is weergegeven welke aspecten Bob noemt. In interview 1 relateert Bob de aspecten 'steilheid' en 'snelheid' aan elkaar. Daarbij legt hij vooral in interview 1 maar ook nog in interview 2 een onjuiste relatie tussen de raaklijn en de gemiddelde snelheid. Hij zegt namelijk: "*Ik weet dat de gemiddelde snelheid een raaklijn is.*" In de interviews 3 en 4 doet hij deze uitspraak niet meer.

Tabel 6.2.4 Het aantal door Bob genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings- coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	1			1			
I-2	4		1	2			
I-3	4		1	1			1 (MK)
I-4	4		2	2	1		

In interview 2 relateert hij in berekenopdrachten nog steeds de aspecten 'steilheid' en 'snelheid' aan elkaar, maar breidt hij met name het redeneren over het grafische aspect 'steilheid' uit en gebruikt hij ook het aspect 'richtingscoëfficiënt'. Doordat hij in interview 2 aan verschillende opdrachten hetzelfde aspect relateert, namelijk 'steilheid van de grafiek in één punt', gaat hij ook bij verschillende opdrachten de raaklijnmethode toepassen. Hij verwoordt in interview 2 nog een andere relatie namelijk dat de afgeleide van een afstand-tijd-grafiek een snelheid-tijd-grafiek is. Bij de opdracht *Kogel* in interview 2 zegt Bob bijvoorbeeld: "*Ik weet nog dat de afgeleide van zo'n afstand-tijd-grafiek, van zo'n formule, was de snelheid-tijd-grafiek; dat stond gewoon in een wiskundeboek*." In de redeneeropdrachten legt hij in interview 2 nog geen relaties met aspecten van het concept afgeleide.

In de interviews 3 en 4 blijft Bob de drie genoemde aspecten, namelijk 'steilheid', 'snelheid' en 'richtingscoëfficiënt', aan elkaar relateren. Dit helpt Bob in de opdracht *Kosten* de notatie TK′(20) te interpreteren. Hij geeft in interview 3 een redenering over 'snelheid' om een economische opdracht te interpreteren als hij zegt: "*Bij een s-t grafiek weet je dat de afgeleide v is* […]*, dit is denk ik wat je noemt marginale kosten, kosten per product, wat de kosten per product zijn als het aantal producten 20 miljoen is* […]. *Ik kwam erop dat wanneer je een s keer t grafiek hebt, dan is de afgeleide v, dat is in meter per seconde, dus nu hebben we een totale kosten maal afzet, dus dat is dan kosten per afzet en dat is dus kosten per product.*" Door het leggen van deze relatie ontstaat er echter een onduidelijkheid: de interpretatie 'kosten per product' voor TK′(20) is gebaseerd op 'meter per seconde', maar is niet correct in de economische situatie.

In interview 4 relateert hij de genoemde aspecten van het concept afgeleide vlot aan elkaar. Dit komt vooral naar voren in uitspraken in verschillende opdrachten waarin de ‘snelheid’, ‘steilheid’ en ‘richtingscoëfficiënt’ aan elkaar verbonden worden en gerelateerd aan de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren. Een voorbeeld hiervan is de uitspraak in interview 4: “*Het gaat om de snelheid dan moet ik, dus dan moet ik de richtingscoëfficiënt van dat punt hebben, van de raaklijn zeg maar; en eigenlijk differentiëren […]; als ik de afgeleide formule bepaal heb ik de snelheidsformule*.”

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Bob gebruikt in alle interviews de grafische representatie bovengemiddeld. Vanaf interview 3 komen de symbolische en numerieke representatie voor het eerst ook boven het gemiddelde. In interview 4 gebruikt hij de symbolische representatie het meest. Hij relateert steeds beter aspecten van het concept afgeleide, met name ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’ en ‘snelheid’ en gebruikt deze relaties om bijvoorbeeld een economie-opdracht te interpreteren.

6.2.5 De ontwikkeling van Bobs wiskundige bekwaamheid

In de interviews 1 en 2 gebruikt Bob vaak de grafische representatie. Dit blijkt zowel in de gekozen procedures als in de genoemde aspecten (‘richtingscoëfficiënt’ en ‘steilheid’). Vanaf interview 2 relateert hij ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’ en ‘snelheid’ in meerdere opdrachten aan elkaar. Hierdoor herkent hij in de verschillende situaties snel dezelfde aspecten van het concept afgeleide en gebruikt hij bij verschillende opdrachten dezelfde procedures. In de interviews 3 en 4 gebruikt hij een combinatie van de symbolische en de grafische en in mindere mate de numerieke representatie. In interview 4 beschikt hij over een breed repertoire: hij noemt procedures op alle lagen, maar gebruikt bij voorkeur symbolisch differentiëren om opdrachten op te lossen. In interview 4 legt hij uit hoe de natuurkundeformules voor snelheid en afgelegde weg gekoppeld zijn aan het concept afgeleide.
Bobs werk kenmerkt zich door creatieve oplossingen, die soms niet goed zijn. Hoewel hij niet altijd zeker is van een procedure probeert hij deze toch uit. Bepaalde onjuiste werkwijzen of ideeën zoals de oppervlaktemethode, het idee dat er twee soorten afgeleiden zijn en de uitspraak dat de raaklijn de gemiddelde snelheid geeft, verdwijnen in de loop van de interviews en maken plaats voor accuratere uitspraken.
Ontwikkeling van Bobs wiskundige bekwaamheid wordt in alle indicatoren zichtbaar. Er is een toename in de breedte en samenhang van Bobs repertoire en hij relateert steeds meer aspecten van het concept afgeleide aan de verschillende situaties en aan elkaar.

6.3 De ontwikkeling van Casper

6.3.1 Achtergrond van de leerling

Casper is een leerling die het profiel Natuur en Techniek gekozen heeft met als keuzevak economie. Hij wordt aan het begin van het onderzoek, in vwo 4, door wiskundedocente P beoordeeld als goede leerling. Naar haar oordeel heeft Casper een goed inzicht. Ze licht dat toe met de uitspraak: "*Hij heeft aan een half woord genoeg. Je bent in twee zinnen klaar, en dan snapt ie het geheel*." Hij maakt zijn huiswerk niet goed volgens de docente maar is goed in staat in te schatten wanneer hij zijn werk moet doen. Hij kan het werk dan snel inhalen. Casper vertelt zelf dat hij in een proefwerkweek op één dag soms een heel hoofdstuk bestudeert, waarvan hij tot dan nog geen opdrachten heeft gemaakt.

In vwo 6 heeft hij dezelfde wiskundedocente, die hem nu indeelt als gemiddelde leerling. Haar verklaring daarvoor is: "*Casper is gemiddeld, omdat hij wel af en toe inzicht heeft, maar heel slordig is. Hij maakt nog te weinig sommen om routine te krijgen. Als hij goed zou oefenen zou hij met sprongen vooruit gaan. Het inzicht heeft hij wel*."

Hij is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B12 op het schoolexamen een 6,9 en op het centraal schriftelijk examen een 8,0.

6.3.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

De opdracht Watertanks-b

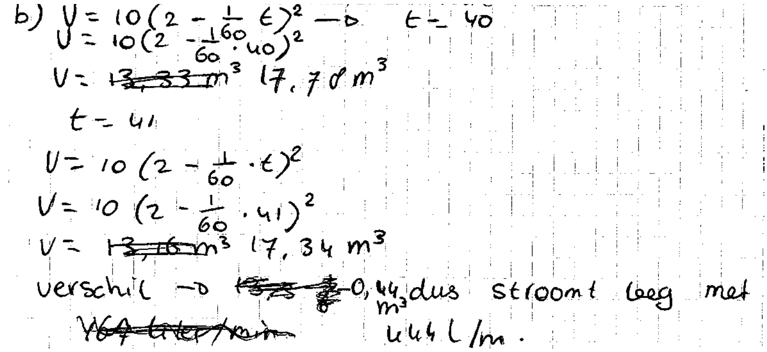
In tabel 6.3.1 wordt een samenvatting gegeven van Caspers werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.3.1 Caspers werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Casper zegt dat hij hier twee tijdstippen kan invullen, bijvoorbeeld $t = 40$ en $t = 41$. Hij berekent de afname van $t = 40$ naar $t = 41$ (figuur 6.3.1), maar vergeet steeds het kwadraat. Ter controle plot hij de grafiek van V, maar ook nu vergeet hij het kwadraat. Dan constateert hij dat hij een kwadraat is vergeten en verbetert zijn berekening. In de tabel van de grafische rekenmachine leest hij de waarden van V af bij 40 en 41 en berekent het verschil (figuur 6.3.1). Kortom, Casper benadert de momentane uitstroomsnelheid met een laag 2-procedure, de intervalmethode.
Interview 2, november 2006 Casper redeneert de hele opdracht over het beginpunt bij $t = 0$ waar het volume 40 is, in plaats van het punt met $t = 40$. Hij zegt dat hij nog een ander tijdstip moet hebben: "*Je wilt weten met welke snelheid hij leegloopt, dus dan moet je ook een tweede punt hebben om het uit te rekenen, anders zit er geen verschil en zit hij vol, dus dan heeft het weinig zin*." Na deze uitspraak geeft hij een toelichting die refereert aan het limietproces. Hij zegt : "*Je moest dat verschil met een letter aangeven, maar dat was dan 0,01 of zoiets, en dan dat verschil heel klein maken*." Hij neemt nu $t = 0$ en $t = 0{,}001$, en merkt op dat hij er ook tien nullen voor kan zetten. Hij berekent nu met de klein-intervalmethode de uitstroomsnelheid, maar maakt daarin een fout. Zijn antwoord kan volgens hem niet goed zijn, want als het zou kloppen, stroomt er nooit 40.000 liter uit de tank in 120 minuten.

Casper controleert met de raaklijnmethode (weer in het punt met t = 0), maar ook over het antwoord 0,75 dat hij nu vindt, twijfelt hij. Volgens hem komt er iets van 400 liter/minuut uit, omdat het meer moet zijn dan het antwoord van onderdeel a. Kortom, hij berekent de opdracht eerst met de klein-intervalmethode. Ter controle gebruikt hij de raaklijnmethode en geeft hij een globale schatting van het antwoord. Differentiëren noemt en gebruikt hij in deze opdracht niet, hoewel hij bij de eerste opdracht van dit interview wel de afgeleide functie gebruikt had.
Interview 3, mei 2007 Casper zegt hier laatst een proefwerk over gehad te hebben, waar hij een onvoldoende voor had. Hij plot de grafiek van V en zoekt op zijn rekenmachine in het CALC-menu optie 7 (integraal). Hij merkt op dat je dan twee waarden in moet voeren en niet alleen 40 kunt invullen. Na deze uitspraken schakelt hij over en zegt: "*Ja, ik zat misschien te denken als je differentieert dat ik dan 40 invul als ik het gedifferentieerd heb.*" Hij berekent nu als afgeleide V' = 10 (4 – 2/60 t), maar deze afgeleide is niet correct. Hij plot de grafiek van V' en berekent V'(39) en V'(40). Hij constateert dat de afname van 39 naar 40 minuten 1/3 kubieke meter per minuut is, wat hij ook nog verifieert door in de tabel van V' te scrollen. Hij leest dus de afname tussen t = 39 en t = 40 op de grafiek van de afgeleide functie af, terwijl de afname van het volume wordt gevraagd. Hij kijkt weer naar de grafiek van V en constateert dat zijn werkwijze niet klopt. Hij zegt: "*Ik ga gewoon een raaklijn bepalen*." Hij refereert daarbij aan het vak natuurkunde, waar je volgens hem "*bij gekromde lijnen een raaklijn kunt gebruiken*". Hij zegt nog dat hij vergeten is hoe je dit met de rekenmachine doet. Hij weet nog wel dat er in het boek een voorbeeld stond met de letters t en h. Casper wil de opdracht dus eerst oplossen met de integraal-optie van de rekenmachine maar stapt vervolgens over op de afgeleide functie en de grafiek van de afgeleide functie. Omdat dit niet lukt gebruikt hij vervolgens de raaklijnmethode die hij correct uitvoert.
Interview 4, november 2007 Casper berekent de afgeleide door eerst de haakjes weg te werken. De afgeleide gebruikt hij om V'(40) te vinden. Hij zegt dat hij kan controleren met een raaklijn en dan het verschil in hoogte gedeeld door het verschil in tijd te doen. Hij geeft dit met een gebaar van zijn pen aan in de tekening, maar hij voert de berekening niet uit. Als de interviewer doorvraagt, meldt Casper ook nog: "*Ik had misschien ook dat je een beetje gaat benaderen dat je hier bijvoorbeeld als t = 39,99 invult en dan ook 40,01 kun je ook kijken naar daar het gemiddelde van.*" Kortom, Casper gebruikt of noemt in de uitwerking van deze opdracht drie procedures.

Uit tabel 6.3.1 blijkt dat Casper in interview 1 de intervalmethode gebruikt om deze opdracht op te lossen. De (klein-)intervalmethode blijft hij in alle interviews gebruiken, maar wel steeds in een gewijzigde vorm. Kiest hij in interview 1 nog voor de afname over een interval van één minuut (zie figuur 6.3.1), in interview 2 berekent hij, hoewel in het verkeerde punt, de afname op een klein interval van t = 0 tot t = 0,001. In interview 3 gebruikt hij de waarden t = 39 en t = 40, maar vult hij deze in bij de afgeleide functie in plaats van de gegeven formule voor het volume. In interview 4 noemt Casper de klein-intervalmethode als tweede controlemethode, zonder deze uit te voeren.



Figuur 6.3.1 Uitwerking *Watertanks-b* in interview 1

Het gebruik van de (klein-)intervalmethode wordt vanaf interview 2 aangevuld met de raaklijnmethode, die hij in de interviews 2, 3 en 4 steeds noemt of uitvoert. In interview 3 relateert hij de raaklijnmethode aan natuurkunde als hij zegt: "*Met natuurkunde doen we dat ook; bij gekromde lijnen kun je een raaklijn gebruiken*."

Vanaf interview 3 gebruikt hij ook symbolisch differentiëren maar in interview 3 berekent en gebruikt hij de afgeleide niet correct. In interview 4 berekent hij voor het eerst bij deze opdracht de afgeleide correct, en noemt hij de mogelijke controle van het antwoord met de raaklijnmethode en klein-intervalmethode.

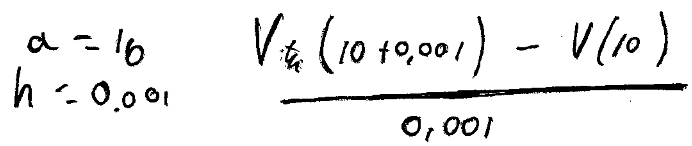
In de opeenvolgende interviews breidt Caspers repertoire zich dus steeds verder uit van klein-intervalmethode naar raaklijnmethode naar symbolisch differentiëren. De eerste keer dat hij de raaklijnmethode toepast is hij niet zeker van zijn antwoord en de eerste keer dat hij de afgeleide berekent, weet hij niet hoe hij de afgeleide kan gebruiken om de momentane uitstroomsnelheid te berekenen.

Tabel 6.3.2 Caspers werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Casper vraagt zich af waar de *h* voor staat en zegt dan: "*Dat is een formule die ik herken, dat heb ik bij wiskunde ook gedaan* […], *bij wiskunde stond hij vaak voor 0,1*." Hij geeft een uitleg waarin hij beredeneert dat je het verbruik in liters op een bepaald punt kunt benaderen. Het woord 'benaderen' legt hij uit met de opmerking: " *Ja, benaderen want je kunt het nooit precies weten want het is niet een rechte lijn. Je kiest twee punten en daar tussenin ga je zitten maar het is heel minuscuul raaklijnachtig wat je tekent, berekent.*" Hij heeft het ook over het limietproces wanneer hij zegt dat als je een grotere afstand neemt (voor *h*, GR) je het minder goed kunt benaderen. En daarna zegt hij: "*Hoe kleiner, hoe dichterbij je op het punt zelf zit, dus hoe meer nullen je gebruikt, hoe beter het is* […], *je zult altijd een ongeveer precies getal krijgen*." Hij herkent de formule uit de wiskundeles en relateert de formule aan het benaderen op een bepaald punt en de raaklijn. Binnen de situatie heeft hij het niet over het gemiddelde verbruik, maar over het precieze verbruik.
Interview 3, mei 2007 Casper herkent de formule want hij zegt: "*Dit was het begin van het benaderen van zo'n punt, maar dat was met t en h*." Hij zegt dat je voor *h* bijvoorbeeld 0,01 kiest. Met de formule bereken je het verbruik op een punt. Hij schrijft een getallenvoorbeeld op met

a = 10 en *h* = 0,001 (figuur 6.3.2). Hij sluit de opdracht af met : "*Ja, ik denk dat het betekent, eh, je wilt een punt benaderen* […], *je kunt het steeds kleiner en kleiner maken en dan krijg je het precieze aantal verbruik.*" Casper herkent in de formule het limietproces van het concept afgeleide maar spreekt in zijn uitleg niet over begrippen die gerelateerd zijn aan het concept afgeleide.
Interview 4, november 2007 Casper zegt als eerste dat de formule "*de benadering van een punt is*". Als hij verder redeneert, relateert hij de formule aan steilheid en afgeleide. Hij zegt: "*Je krijgt een soort steilheid van de grafiek. Hoeveel hij precies extra heeft gebruikt, het is een soort afgeleide. Je krijgt niet echt wat het precies is maar een benadering ervan*". Hij spreekt vervolgens over de "*verandering van verbruik met veranderingsfactor h*". Hij verschuift in zijn uitleg van het punt zelf (benadering van een punt), naar steilheid, afgeleide en verandering. De precieze betekenis in de situatie brengt Casper niet onder woorden, maar hij spreekt nu niet meer over 'het verbruik op het punt', maar gebruikt woorden als 'hoeveel hij extra gebruikt' en 'de verandering van verbruik'.

In tabel 6.3.2 wordt Caspers werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. In de interviews 2 en 3 expliciteert Casper dat hij de formule herkent van wiskunde. In interview 4 lijkt dat ook het geval maar zegt hij het niet. In de interviews 2 en 3 komen drie gelijksoortige opmerkingen voor, namelijk dat het om de "*benadering van een punt gaat*", dat je "*voor h 0,1 of 0,01 kunt kiezen*" (figuur 6.3.2) en dat je met deze formule "*het precieze verbruik*" kunt vinden. Deze drie uitspraken komen steeds terug bij interpretatie van de benzineformule. In interview 2 doet hij ook nog een uitspraak over een koorde tussen twee punten die 'raaklijnachtig' is.



Figuur 6.3.2 Aantekening bij de opdracht *Benzine* in interview 3

In interview 4 start hij weer met de uitspraak dat het om "*de benadering van een punt gaat*". Maar na deze uitspraak verandert het perspectief in zijn uitspraken, omdat hij niet meer spreekt over 'het punt' of 'het verbruik', maar de formule interpreteert in termen van steilheid, afgeleide, extra verbruik en verandering van gebruik. In interview 4 is zijn interpretatie gekoppeld aan aspecten van het concept afgeleide.

6.3.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.3.3 is weergegeven welke procedures Casper in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.3.3 Door Casper gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●●⊙○								●⊙	
I-2	●⊙○	⊙		●⊙		●●	●●●			
I-3	●			●●			⊙○		●⊙⊙	●
I-4		○		○○		●●○	●●●●●	●	⊙	●

●: accuraat uitgevoerd; ⊙: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

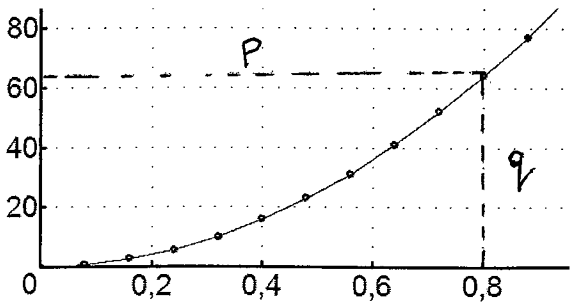
Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure
In de interviews gebruikt of noemt Casper achtereenvolgens zes, elf, negen en veertien maal een adequate procedure. In interview 1 betreft dit alleen de intervalmethode en natuurkundeformules. Hij gebruikt in dit interview bij meerdere opdrachten de rekenmachine om toenames of afnames af te lezen. Hij doet dit door te scrollen in een tabel met stapgrootte één. In interview 2 lost Casper veel berekenopdrachten goed op door adequate procedures te kiezen. In interview 3 is daarin achteruitgang te constateren. In interview 4 is het aantal maal dat hij een adequate procedure kiest toegenomen tot veertien. Hij kiest bij voorkeur de procedure symbolisch differentiëren en voert de klein-intervalmethode en de raaklijnmethode niet meer uit. Er is een verschuiving van laag 2- en laag 3-procedures naar laag 4-procedures. In interview 4 weet hij ook procedures geleerd bij natuurkunde en economie adequaat te kiezen of toe te passen.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire
In interview 1 is de breedte van het repertoire beperkt tot de intervalmethode en natuurkundeformules. De gebruikte natuurkundeformules zijn formules voor gemiddelde snelheid en gemiddelde versnelling.
Casper gebruikt in interview 2 zowel laag 2-, laag 3- en laag 4-procedures. In de interviews 3 en 4 komen daar procedures bij geleerd bij natuurkunde en economie. Hij noemt soms ook procedures die niet toepasbaar zijn bij de gegeven situatie, zoals het gebruik van een integraal-optie van de rekenmachine (tabel 6.3.1, I-3) of het berekenen van de oppervlakte onder de grafiek bij de opdracht *Kogel* in interview 4.
Nieuw geleerde procedures voert hij in eerste instantie vaak niet accuraat uit, maar in een later interview is hierin verbetering te zien. Dit betreft bijvoorbeeld de raaklijnmethode in interview 1 en symbolisch differentiëren in de interviews 2 en 3.
Symbolisch differentiëren en het interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie zijn in interview 2, maar meer nog in interview 4, de centrale

procedures. De (klein-)intervalmethode voert hij in interview 2 nog uit, maar in interview 4 wordt deze procedure alleen nog maar door hem genoemd.

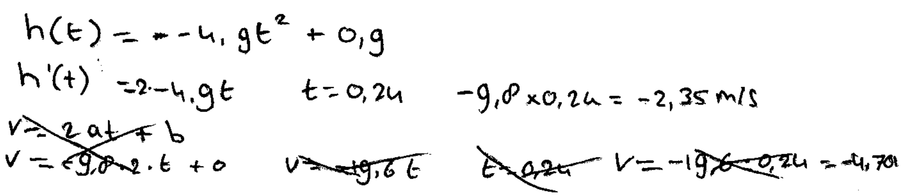
Indicator 1.3 De samenhang van het repertoire

In interview 1 gebruikt Casper per probleemsituatie verschillende procedures, gekoppeld aan de verschillende schoolvakken. Bij de natuurkundige opdracht *Tikkerband* berekent hij bijvoorbeeld een momentane snelheid met een procedure waar hij over zegt: "*Ja dat was van natuurkunde, dit was p en dit was q*"(zie figuur 6.3.3). Deze letters *p* en *q* werden bij natuurkunde gebruikt om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een *x*-*t*-grafiek te bepalen (zie figuur 5.1).



Figuur 6.3.3 Tekening van Casper bij *Tikkerband–b* (I-1)

In interview 2 gebruikt Casper frequent zowel de raaklijnmethode als symbolisch differentiëren, maar hij relateert deze twee procedures nauwelijks aan elkaar. Bij de eerste opdracht *Kogel* begint hij met de uitspraak: "*Ik zou zelf een raaklijn gaan gebruiken of anders, bij wiskunde moet je de grafiek benaderen met hoe heet zo'n ding, een afgeleide*." Hij berekent de afgeleide eerst fout (figuur 6.3.4) met een formule uit het wiskundeboek (figuur 5.3). Bij de tweede opdracht van interview 2 gebruikt of noemt hij de mogelijkheid van symbolisch differentiëren in het geheel niet (zie tabel 6.3.1), terwijl hij wel de raaklijn noemt.



Figuur 6.3.4 Berekening bij de opdracht *Kogel* (I-2)

In interview 3 en meer nog in interview 4 neemt het gebruik van tabellen af. Het symbolisch differentiëren, de raaklijnmethode en het interpreteren van de grafiek van de afgeleide worden meer door hem ingezet en aan elkaar gerelateerd. Bij bijna alle opdrachten van interview 4 gebruikt Casper twee van deze drie procedures.

In de interviews 3 en 4 relateert hij ook economische procedures expliciet aan symbolisch differentiëren. In interview 3 zegt hij bij de opdracht *Kosten* bijvoorbeeld: "*Als dat apostrof ding er achter staat heeft het met de marginale kosten te maken. Dat is de afgeleide van de totale kosten. De marginale kosten is als je een product meer maakt, hoeveel dat totaal meer kost*." En in interview 4 zegt Casper bij de opdracht *Monopolie-b*: "*De afgeleide van die* [wijst naar TO]*, nou ik doe eigenlijk gewoon even de marginale opbrengst* [schrijft de afgeleide van TO op]*, die moet gelijk zijn aan de marginale kosten*."

Ook relaties tussen bij natuurkunde en wiskunde geleerde procedures worden door hem genoemd. Dit is zichtbaar in het gebruik van de raaklijnmethode en in mindere mate in het gebruik van natuurkundeformules. De raaklijnmethode noemt hij in de interviews 1, 2 en 3 als een procedure geleerd bij natuurkunde, want hij zegt erover in interview 3: "*Als je het punt wilt bepalen, dan moet je er zo langs gaan en niet erdoorheen, dat mocht niet bij natuurkunde.* [...] *Hij moest aan één kant blijven en hij mocht op één punt maar raken, allemaal stomme regels die ik niet begrepen heb*." Tegelijkertijd gebruikt hij bij het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn een notatie die hij bij wiskunde geleerd heeft. Zowel bij de opdracht *Tikkerband-b* als *Watertanks-b* noteert hij de helling van de raaklijn met een differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Natuurkundeformules voor de valbeweging relateert hij enigszins aan het symbolisch differentiëren. Hij beredeneert bij de opdracht *Kogel* dat de hoogte een 'afstand' is en zegt dan dat de afgeleide de 'snelheidsformule' is. Hij noteert in interview 4 de afgeleide van de hoogte niet als h' maar als $v = 9{,}8t$. Daarbij merkt hij op dat deze uitkomst niet vreemd is, omdat hier de valversnelling van 9,8 in naar voren komt. Het verband tussen bij natuurkunde geleerde formules en bij wiskunde geleerde procedures wordt door Casper niet geëxpliciteerd.

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire

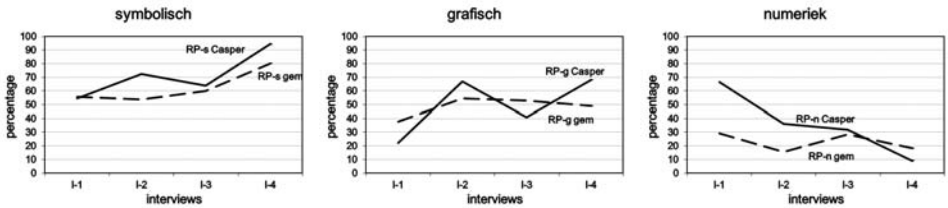
In interview 2 beschikt Casper nog over een smal repertoire en procedures zijn nog niet sterk aan elkaar gerelateerd. In de interviews 3 en vooral 4 relateert hij verschillende procedures, zoals raaklijnmethode, klein-intervalmethode, symbolisch differentiëren, het interpreteren van de grafiek van de afgeleide en economische formules aan elkaar. In interview 4 beschikt Casper over een breed repertoire en verschuift het van een variatie van laag 2-, 3- en 4-procedures in interview 2 naar vooral laag 4-procedures in interview 4. De natuurkundeformules voor valbewegingen zijn meer geïsoleerd in zijn uitspraken, maar hij gebruikt wel het gegeven dat de afgeleide van de afgelegde weg de snelheid is.

6.3.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

In figuur 6.3.5 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Casper afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.

Casper gebruikt in interview 1 vaak de tabel als uitgangspunt van zijn redeneringen. De numerieke representatie speelt in interview 1 een grote rol, maar in de volgende interviews gebruikt hij de numerieke representatie steeds minder.



Figuur 6.3.5 Verloop van de representatiepercentages van Casper

In interview 2 neemt het aantal genoemde grafische aspecten toe. Notaties als $R'(80)$ en de benzineformule worden door hem grafisch geïnterpreteerd als richtingscoëfficiënt of geassocieerd met de raaklijn. Bij de opdracht *Remweg-b* zegt hij bijvoorbeeld in interview 2: "*Hier bepaal je de afgeleide, dus de richtingscoëfficiënt van hoe snel je dan remt per meter*." En bij de opdracht *Benzine* legt hij de betekenis van de benzineformule uit in termen van een raaklijn en een lijntje tussen twee punten op de grafiek (tabel 6.3.2).

In interview 3 nemen alle representatiepercentages bij hem af. Dit heeft te maken met verschillende factoren. Hij gebruikt in interview 3 minder procedures (tabel 6.3.3), hij lost niet alle opdrachten goed op, hij interpreteert de opdracht *Kosten* niet grafisch maar alleen in economische termen, en bij de opdracht *Benzine* is zijn interpretatie minder adequaat dan in interview 2.

In interview 4 gebruikt hij de symbolische representatie en de grafische representatie wel weer bovengemiddeld. Hij geeft in dit interview de voorkeur aan symbolische procedures, waardoor RP-s toeneemt tot bijna 100%.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

In tabel 6.3.4 is weergegeven welke aspecten Casper noemt. In interview 1 koppelt hij aan de twee opdrachten, *Watertanks-c* en *Monopolie-b*, hetzelfde aspect van het concept afgeleide, namelijk de 'toename per eenheid'. Hij noemt ook dat 'verschillen' tussen twee opeenvolgende waarden gelijk moeten zijn wanneer kosten en opbrengsten even snel toenemen.

Tabel 6.3.4 Het aantal door Casper genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1					2		
I-2	1		4	3		1	
I-3	1				1		1 (MK)
I-4	1		2	2	1	1	2 (MK)

Casper relateert in de interviews 2 vooral twee aspecten van het concept afgeleide aan de verschillende opdrachten, namelijk 'richtingscoëfficiënt' en 'snelheid'. In de opdracht *Remweg-b* in interview 2 zegt hij bijvoorbeeld: "*Hier bepaal je de afgeleide, dus de richtingscoëfficiënt van hoe snel je dan remt per meter*." In interview 3 is het aantal genoemde aspecten minder.
In interview 4 is het aantal genoemde aspecten in zijn redeneringen in vergelijking met identieke opdrachten in interview 2 breder geworden. 'Richtingscoëfficiënt' en 'snelheid' komen nog steeds bij herhaling voor. In de opdrachten *Kogel* en *Remweg* verbindt hij de procedure symbolisch differentiëren met 'snelheid' en 'versnelling' in de uitspraak: "*Ik weet wel als je de afgeleide neemt van de snelheid of van je afstandfunctie dat je v krijgt. En als je daar dan weer de afgeleide van neemt krijg je a de versnelling*." Overigens maakt deze regel dat hij de opdracht *Remweg* niet kan oplossen omdat hij geen betekenis kan geven aan een 'snelheidfunctie' die afhankelijk is van de snelheid *v*, wat hem de uitspraak ontlokt: "*Ik word gek*."
Naast de bovengenoemde aspecten redeneert Casper bijvoorbeeld in de opdracht *Benzine* over 'steilheid' en gebruikt hij numerieke interpretaties zoals 'het extra verbruik' en 'de verandering van verbruik' (zie tabel 6.3.2). In de opdracht *Monopolie* relateert hij de afgeleide aan de marginale kosten en noemt die "*de extra kosten per product*".

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Casper redeneert in interview 1 vooral numeriek, maar in de volgende interviews neemt het gebruik van de numerieke representatie af. Vanaf interview 2 komen de symbolische en grafische representatie in zijn uitspraken en handelingen en uiteindelijk in interview 4 overheerst de symbolische representatie.
Hij relateert in interview 2 vooral het aspect 'richtingscoëfficiënt' en 'snelheid' aan de verschillende situaties. De genoemde aspecten zijn in interview 4 breder geworden in vergelijking met interview 2. In de verschillende opdrachten gebruikt Casper een grote variatie aan aspecten die aan het concept afgeleide gerelateerd zijn. In interview 3 is er zowel als het gaat om

het gebruik van de verschillende representaties als in het noemen van meerdere aspecten een achteruitgang.

6.3.5 De ontwikkeling van Caspers wiskundige bekwaamheid

Casper gebruikt in interview 1 vooral numerieke procedures en aspecten zoals de tabelfunctie van zijn rekenmachine en het aspect 'toename'. In interview 2 neemt het gebruik van de grafische representatie toe, zowel in het gebruik van grafische procedures als het spreken over grafische aspecten. Hij relateert in interview 2 de aspecten 'richtingscoëfficiënt' en 'snelheid' aan de procedures 'symbolisch differentiëren' en 'raaklijnmethode'. Over deze relaties is hij in interview 2 niet geheel zeker. In interview 3 heeft hij ten opzichte van interview 2 een terugval in gebruikte procedures, representaties en aspecten. In interview 4 blijkt Caspers ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid op meerdere manieren: zijn repertoire wordt breder en meer samenhangend dan bij dezelfde opdrachten in interview 2 en hij noemt en relateert veel verschillende aspecten. Hij gebruikt vooral laag 4-procedures maar noemt ook laag 3-procedures en relateert de verschillende procedures goed aan elkaar. Dit geldt ook voor de relatie tussen bij economie en bij wiskunde geleerde procedures en aspecten. Van de procedures geleerd bij natuurkunde verbindt hij wel de raaklijnmethode met procedures geleerd bij wiskunde, maar hij doet dit nauwelijks met de natuurkundeformules voor de valbeweging.

Caspers werk kenmerkt zich doordat hij veel relaties van het concept afgeleide gaat overzien. Hij gebruikt in de loop van de interviews relaties tussen numerieke, grafische en symbolische procedures op alle lagen, waarbij een verschuiving plaatsvindt van vooral numerieke laag 2-procedures naar vooral symbolische en grafische laag 4-procedures.

Caspers ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide is zowel zichtbaar in het beschikken over een breder en meer samenhangend repertoire, maar ook in verbetering van relaties die hij legt tussen verschillende aspecten van het concept afgeleide. Zijn ontwikkeling lijkt in interview 3 een terugval te vertonen. Hij gebruikt en noemt in interview 4 wel weer veel verbanden tussen procedures, representaties en aspecten van het concept afgeleide en relateert economieformules accuraat aan wiskundige procedures.

6.4 De ontwikkeling van Dorien

6.4.1 Achtergrond van de leerling

Dorien is een leerling die het profiel Natuur en Gezondheid heeft gekozen met in het vrije deel natuurkunde-2. Volgens haar wiskundedocente Q in vwo 4 is ze een goede leerling. De docente zegt: "*Dorien pakt uitleg snel op en ze heeft aan een half woord genoeg*. *Ze werkt graag met uitwerkingen en heeft een hekel aan zelf uitleggen*. *Bij een moeilijke som zal ze snel zeggen, laat maar*. *Het inzicht is er wel, maar ze moet handvatten hebben*."

Docente P, de wiskundedocente van vwo 6, merkt op dat Dorien iemand is die redelijk werkt, redelijk inzicht heeft, en daarmee boven het gemiddelde uitkomt. De combinatie van werken en inzicht maakt haar bovengemiddeld.

Dorien geeft zelf aan dat ze voor een exact profiel gekozen heeft omdat ze daar meer mee kan. Ze haalde ook altijd goede cijfers voor wiskunde, maar moet in vwo 4 wel haar huiswerk bijhouden. Dat gaat moeilijk want ze heeft niet veel discipline, zegt ze zelf. Wanneer ze in interview 1 een kinematicaopdracht maakt zegt ze dat ze bij "*dat hoofdstuk niet goed haar huiswerk heeft gemaakt*".

Ze geeft in interview 1 aan dat ze sommige delen van wiskunde niet leuk vindt: "*Nou ik vind ontbinden, met formules, wel heel erg leuk om te doen, maar zodra er dan een grafiek bij komt vind ik er niets meer aan*." Over haar studiehouding in de les zegt ze dat ze "*veel praat in de les, want gezelligheid is belangrijk*".

Dorien is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B1 op het schoolexamen een 7,6 en op het centraal schriftelijk examen een 5,6.

6.4.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.4.1 wordt een samenvatting gegeven van Doriens werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.4.1 Doriens werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Dorien leest uit de grafiek de waarde 17,5 af. Ze beredeneert dat er 22,5 liter uit is gestroomd in 40 minuten, maar zegt: "*Dat is volgens mij niet de snelheid op dit punt*." Ze geeft aan dat dit een gemiddelde snelheid is. Ze zegt: "*Ik zou wel de gemiddelde snelheid uit kunnen rekenen. Maar op dat punt is het anders dan de gemiddelde snelheid*." Ze berekent de gemiddelde snelheid door de uitgestroomde hoeveelheid (22500 liter) te delen door de verstreken tijd (40 minuten) en vindt zo 562,5 liter per minuut. Ze zegt dat ze "*niet weet of het op het moment zelf is*". Dorien berekent op basis van de grafiek een antwoord op laag 2 maar zegt erbij dat er gevraagd wordt om de snelheid op een punt (laag 3).
Interview 2, november 2006 Deze opdracht is volgens Dorien "*eigenlijk hetzelfde als opdracht één*", die ze net hiervoor heeft gemaakt. Ze berekent de afgeleide met een rekenfout en vult t = 40 in. Door de rekenfout vindt ze $V'(40)$ = 2/3 liter per minuut. Ze vraagt zich af of het antwoord klopt in vergelijking met haar antwoord bij onderdeel a. Ze tekent de raaklijn om haar antwoord te controleren. Met de raaklijn vindt ze 437,5 liter/minuut. Dit vindt ze een

betrouwbaar antwoord, omdat het beter past bij de situatie. Volgens haar is de afgeleide functie niet goed. Ze berekent dus de uitstroomsnelheid op t = 40 zowel met symbolisch differentiëren als met de raaklijnmethode. Ze legt uit dat ze de eerste procedure niet goed heeft gedaan en dat ze het tweede antwoord wel betrouwbaar vindt.
Interview 3, mei 2007 Dorien berekent de afgeleide, door eerst de haakjes weg te werken. Ze zegt: "*Ik doe weer* (net als in onderdeel a, GR) *de afgeleide;* […] *je krijgt dan een formule voor de snelheid*." Ze berekent de afgeleide correct en vindt de uitstroomsnelheid door $V'(40)$ te berekenen. Om te controleren of dit antwoord klopt zegt ze: "*Ik zou een raaklijn kunnen tekenen hierlangs en dan gewoon een driehoek pakken*." Ze voert deze berekening niet uit, maar vindt haar antwoord in vergelijking met onderdeel a redelijk. In het begin gaat het volgens Dorien bij deze tank sneller. Later als er minder water inzit gaar het langzamer. Ze berekent dus de uitstroomsnelheid op t = 40 met de afgeleide functie en noemt dat ze zou controleren met de raaklijnmethode.
Interview 4, november 2007 Dorien tekent eerst een raaklijn. Ze berekent de helling van de raaklijn en schrijft op $V = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{45}{80} = 0{,}5625$ en rekent dit om naar 563 liter per minuut. De 45 heeft ze verkeerd afgelezen. Ze controleert haar antwoord met de afgeleide $V'(40)$ en komt op –444 liter/min. Ze zegt geen andere procedures te kennen. Over het verschil tussen de antwoorden merkt ze op: "*Of dit is te onnauwkeurig* [wijst naar de raaklijn] *of ik heb dit verkeerd gedaan* [wijst naar de afgeleide]." Ze berekent dus net als in eerdere interviews de uitstroomsnelheid op t = 40 met zowel differentiëren als met de raaklijnmethode. Ze zegt geen andere procedures te kennen.

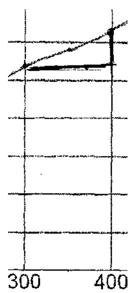
In interview 1 verwoordt Dorien dat ze een gemiddelde snelheid zou kunnen berekenen door naar de verschillen in de eerste 40 minuten te kijken, maar ze beseft dat hier de momentane snelheid gevraagd wordt. Vanaf interview 2 zijn de centrale procedures bij deze opdracht het berekenen van $V'(40)$ en het aflezen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, hoewel ze in de interviews 2 en 4 door rekenfouten tot verschillende antwoorden komt. Ze noemt geen andere procedures om haar antwoord te controleren. Ze controleert haar antwoorden in de interviews 2 en 3 ook door te schatten of het gevonden antwoord klopt.

Tabel 6.4.2 Doriens werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 De formule komt Dorien bekend voor. Ze zegt: "*Dit deden we ook in hetzelfde hoofdstuk als afgeleides*." Dorien zegt iets over "*een kleine waarde er bij op tellen*", en "*eerst 0,3 en daarna 0,03*" en "*dat je dan er telkens dichterbij kwam*". Het gaat volgens haar om 'het verbruikte aantal liter'. Ze gaat getallen invullen, namelijk h =100 en a = 300. Ze berekent dan (32 – 27) : 100 en komt uit op 0,05, maar zegt dat ze "*echt niet weet wat het betekent*". Kortom, ze herkent de formule uit het hoofdstuk over afgeleiden en herinnert zich dat 'het' steeds nauwkeuriger werd, maar ze legt de formule niet uit binnen de situatie.
Interview 3, mei 2007 Dorien zegt: "*Op deze manier moest ik de steilheid berekenen, en later ook de afgeleide. Deze formule werd als bewijs gebruikt voor een andere, snellere formule, en dan moest je die altijd gebruiken, en niet meer deze*."

Dorien brengt vervolgens het limietproces van laag 2 naar laag 3 onder woorden: "*Ik herken dat aan de opbouw van de formule, die h die was eerst groter en die moest je steeds kleiner maken en dan kwam je bij een limiet, en dat was een getal dat je nooit bereikte, dat was de steilheid in één punt*." In deze situatie is de formule volgens Dorien "*hoeveel liter er per kilometer worden verbruikt*". Ze zegt: "*Als je dit bijvoorbeeld tussen 300 en 400 doet, weet je de steilheid, dus dan weet je hoeveel liter er per kilometer wordt verbruikt*" (zie figuur 6.4.1). Dorien relateert aan deze formule verschillende aspecten van het concept afgeleide en kan zowel het limietproces in de grafische representatie, als de betekenis binnen de situatie (op een groot interval) uitleggen.
Interview 4, november 2007 Dorien zegt eerst: "*Ik zie dit staan, en daar ben ik een beetje allergisch voor. Limieten en zo, en dat het steeds dichter bij nul komt* [...] *dit hebben we gehad voor we de afgeleide gingen doen*." Dorien legt aan de hand van het delingsproces met een getallenvoorbeeld uit dat de formule het verbruik in liters per kilometer is. Ze zegt hierover: "*Dit kun je ook schrijven als 'verschil in y delen door verschil in x'; en dat is eigenlijk weer hetzelfde als de afgeleide. Je rekent uit hoeveel liter per kilometer wordt verbruikt; de snelheid van verbruik zeg maar*." Dorien associeert de formule nog met raaklijnen en zegt iets over het limietproces: "*Als je h steeds kleiner neemt, dan krijg je dat h bijna nul is. De limiet heet dat. Dan wordt het steeds nauwkeuriger*." Dorien zegt nog: "*Ik weet nog precies dat het op die bladzijde staat aan het begin van een paragraaf*." Opnieuw relateert ze deze formule aan verschillende aspecten van het concept afgeleide zoals 'het verschil in *y* gedeeld door het verschil in *x*', het limietproces en 'snelheid'. Maar ze geeft de formule ook de betekenis binnen de situatie.

In tabel 6.4.2 wordt Doriens werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. In alle interviews noemt Dorien dat ze de formule herkent uit het hoofdstuk over afgeleiden. In interview 2 zijn haar uitspraken algemeen, en lukt het haar niet uit te leggen wat de formule betekent in de situatie. In het tweede en derde interview kan Dorien zowel het limietproces in de grafische representatie als de betekenis binnen de situatie uitleggen. Ze noemt in de opeenvolgende interviews steeds meer aspecten en relateert deze steeds meer aan elkaar.



Figuur 6.4.1 Tekening van Dorien bij de opdracht *Benzine* (I-3)

6.4.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.4.3 is weergegeven welke procedures Dorien in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.4.3 Door Dorien gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●●⭘								●	
I-2	●			●●○		●○	●●●⭘○			
I-3				●⭘○			●●○		⭘⭘⭘	
I-4				●⭘		●	●●●○○	●	●	

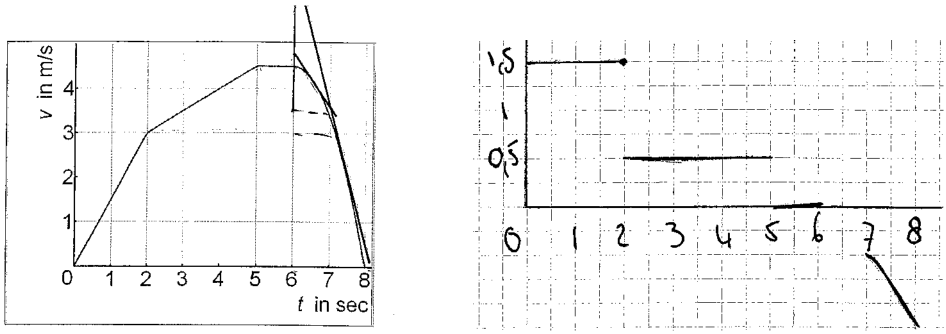
●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure
Uit tabel 6.4.3 blijkt dat Dorien in de opeenvolgende interviews respectievelijk vier, elf, negen en tien maal een adequate procedure noemt of gebruikt. In interview 1 gebruikt ze de intervalmethode en één keer een natuurkundeformule. Vanaf interview 2 gebruikt ze vooral de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren en een enkele keer een andere procedure zoals de grafiek van de afgeleide functie of een natuurkundeformule. In vergelijking met andere leerlingen valt op dat ze al in interview 2 het symbolisch differentiëren in een aantal verschillende opdrachten inzet.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire
Zoals blijkt uit bijlage D gebruikt ze vanaf interview 2 de combinatie raaklijnmethode en symbolisch differentiëren bij de opdrachten *Kogel* en *Watertanks-b*. Bij de opdracht *Monopolie* gebruikt Dorien vanaf interview 2 de combinatie symbolisch differentiëren en interpreteren van de grafiek van de afgeleide. Er is in de interviews 2 en 3 geen toename in de breedte van het repertoire, ook niet als het gaat om haar inzet van procedures bij één opdracht. In interview 4 noemt ze wel andere procedures naast de hierboven beschreven procedures. Bij de opdracht *Kogel* is dat de natuurkundeformule $v = g \cdot t$. Bij de opdracht *Monopolie* concludeert ze dat ze de dubbele afgeleide nul kan stellen. In interview 4 is haar repertoire breder geworden.

Indicator 1.3. De samenhang van het repertoire
Vanaf interview 2 relateert Dorien de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren aan elkaar. Twee voorbeelden hiervan zijn: bij de opdracht *Kogel* in interview 2 zegt ze: "*Nou volgens mij moeten ze iets doen met de raaklijn* […] *volgens mij gaat het over afgeleiden of ik zat te denken om afgeleiden te maken.*" En in interview 4: "*Volgens mij kun je bijna alles wat je met raaklijnen doet*

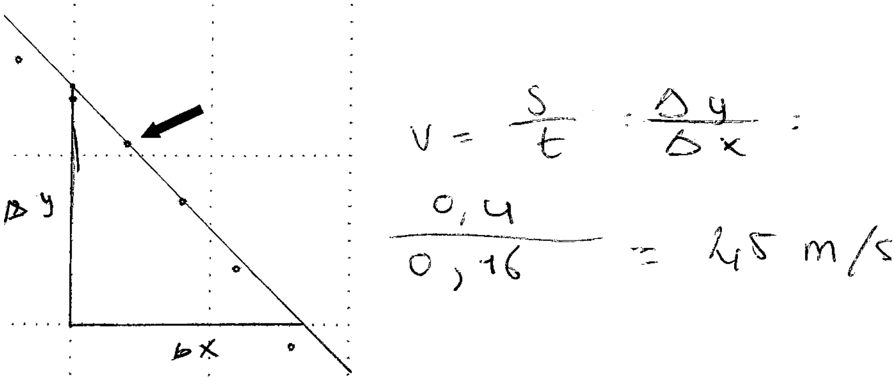
gewoon met de afgeleide doen. Hier reken ik gewoon de steilheid uit en dat doe je met de afgeleide ook." Relaties met andere grafische of numerieke procedures zoals de klein-intervalmethode of grafische rekenmachine procedures legt ze niet.
Dorien noemt de raaklijnmethode in eerste instantie een bij natuurkunde geleerde methode. In interview 2 kiest ze voor de raaklijnmethode, want volgens haar is de steilheid de snelheid. Als ze deze twee procedures genoemd heeft, zegt ze: "*Ik ben heel slecht in wiskunde toepassen in natuurkunde; dan moet ik helemaal omschakelen.*" In interview 3 gebruikt Dorien bij verschillende opdrachten raaklijnen. Bij de opdracht *VT-diagram* merkt ze op: "*Ik weet dat je met de raaklijn de versnelling kunt uitrekenen.*" Om bij de gegeven *v*-*t*-grafiek een *a*-*t*-grafiek te maken houdt ze een redenering op basis van raaklijnen aan de *v*-*t*-grafiek (figuur 6.4.2). Deze redenering resulteert in de *a*-*t*-grafiek van figuur 6.4.2. Dergelijke uitspraken sluiten aan bij theorie geleerd bij natuurkunde. Maar ook bij de opdracht *Watertanks-b* gebruikt ze de raaklijnmethode. Ze past de raaklijnmethode dus in verschillende situaties toe.



Figuur 6.4.2 Twee raaklijnen bij de opdracht *VT-diagram* en de resulterende a-t grafiek (I-3)

Dorien verwoordt geen relatie tussen natuurkundeformules voor de valbeweging en symbolisch differentiëren. Ze controleert in interview 2 haar antwoord met de afgeleide ($h'(t) = -9{,}8t$) en zegt dan: "*Hé dat is de valversnelling.*" Ze herkent in de afgeleide functie de valversnelling, maar relateert de afgeleide niet aan bij natuurkunde geleerde formules zoals $v = g \cdot t$. In interview 4 komt bij de opdracht *Kogel* weer het raakvlak tussen wiskundeprocedures en natuurkundeformules naar voren. In eerste instantie denkt ze dat het in deze opdracht om een horizontale worp gaat. Even later komt ze tot de conclusie dat het om een *s*-*t*-grafiek gaat. Dan kan het gewoon met de afgeleide of met de raaklijn. Ze zegt: "*Nou omdat deze snelheid is een st – grafiek dan kun je volgens mij de afgeleide gebruiken. Of je kunt gewoon een raaklijn tekenen, dit is het verschil in y en dit is het verschil in x*" (figuur 6.4.3).
Ze berekent de snelheid ook met de afgeleide. Ze legt nog uit dat ze formule $s = \frac{1}{2}gt^2$ herkent in de formule van de hoogte: "*Ja omdat dit is de s = ½gt*

kwadraat, dus dat is ½ x 9,81 t kwadraat en daar komt die 4,9 vandaan en dan weet ik ook wel dat 2 x 4,9 dat, dat 9,8 is."



Figuur 6.4.3 Oplossing van de opdracht *Kogel* met de raaklijnmethode (I-4)

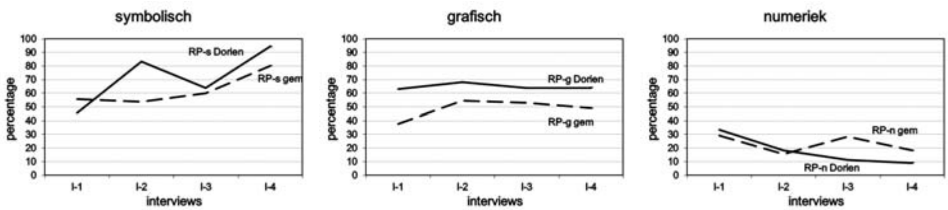
Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire

Vanaf interview 2 gebruikt Dorien vooral twee procedures, namelijk de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren. Beide procedures zijn vanaf interview 2 onderdeel van haar repertoire. Daarnaast gebruikt ze bij enkele opdrachten een aanvullende procedure die verschilt per opdracht. Ze gebruikt bijvoorbeeld de grafiek van de afgeleide functie of een natuurkundeformule om een opdracht op te lossen. De twee centrale procedures relateert ze vanaf interview 2 aan elkaar. De relatie tussen natuurkundeformules en procedures geleerd bij wiskunde verwoordt ze niet duidelijk.

6.4.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

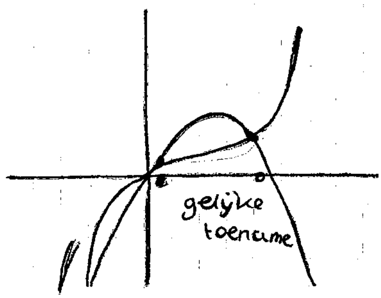
Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

In figuur 6.4.4 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Dorien afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.



Figuur 6.4.4 Verloop van de representatiepercentages van Dorien

Hoewel Dorien in interview 1 opmerkt dat ze grafieken 'niets aan vindt' en in interview 3 dat 'grafieken niet haar sterkste punt zijn', blijkt ze in alle interviews de grafische representatie bovengemiddeld te gebruiken.
In interview 1 plot ze bijvoorbeeld bij de opdracht *Monopolie* de grafieken van TK en TO en houdt ze een redenering waarbij ze een interval aangeeft waarop de twee grafieken een gelijke toename vertonen (figuur 6.4.5).
In de interviews 2, 3 en 4 blijft de grafische representatie een grote plaats innemen in haar berekeningen en redeneringen en deze koppelt ze steeds aan de symbolische representatie. Aan de ene kant blijkt dat uit de gebruikte procedures (tabel 6.4.3), maar ook uit uitspraken bij de redeneeropdrachten. Bij de opdracht *Remweg-b* legt Dorien uit om $R'(80)$ te interpreteren: "*Ik maakte even een raaklijn, want de remweg wordt groter naarmate je sneller gaat volgens mij*." Ze linkt dus de notatie van de afgeleide aan de raaklijn. Ook bij de opdracht *Benzine* interpreteert ze in de interviews 3 en 4 de symbolische representatie in termen van steilheid van de grafiek (tabel 6.4.2).



Figuur 6.4.5 grafieken van TK en TO (I-1)

Een enkele keer maakt Dorien gebruik van een in de opdracht gegeven tabel. In interview 1 berekent ze de gemiddelde snelheid bij de opdracht *Tikkerband-a* met de tabel en ook bij *Tikkerband-b* merkt ze op: "*misschien zou je de tabel kunnen gebruiken*". In de daaropvolgende interviews is het gebruik van de numerieke representatie beperkt.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

In tabel 6.4.4 is weergegeven welke aspecten Dorien noemt. In interview 1 is het aantal door haar genoemde aspecten beperkt, maar noemt ze wel bij verschillende opdrachten dat er verschil is tussen de gemiddelde snelheid en de snelheid op een punt. Ze meldt bijvoorbeeld bij *Watertanks-b* dat ze een gemiddelde snelheid heeft berekend hoewel dat volgens haar niet de snelheid op dat punt is. Daarmee geeft ze aan dat ze in interview 1 beseft dat er onderscheid is tussen een gemiddelde snelheid en de snelheid op één punt (laag 3). Het aspect van 'snelheid in een punt' noemt ze ook bij opdracht *Tikkerband-b* als ze zegt: "*Krijgen we dit weer, dat je op een punt de snelheid moet weten en niet de gemiddelde snelheid*."

Tabel 6.4.4 Het aantal door Dorien genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1				2			
I-2	3			3	2		
I-3	4			3			
I-4	1			3	1	2	

Vanaf interview 2 verbindt ze meer aspecten aan de beschreven situaties. In interview 2 zijn dat vooral de aspecten 'snelheid', 'steilheid' en soms 'toename'. Bij de opdracht *Kogel* zegt ze bijvoorbeeld: "*Nou volgens mij moet ik iets doen met de raaklijn, volgens mij gaat het over afgeleiden* [...] *ik weet wel dat de steilheid de snelheid is*." In hetzelfde interview noemt ze bij de opdracht *Monopolie* ook nog de relatie met toenames als ze zegt: "*Het gaat weer om toenames, dus ga ik weer de afgeleide doen*." En bij dezelfde opdracht: "*Ik heb echt het gevoel dat ik doordat ik afgeleides heb geleerd opeens alles met afgeleide wil doen, maar ik kan niet verzinnen hoe het anders zou moeten*." Ook in de redeneeropdracht *Remweg-b* noemt Dorien bij het zoeken naar de betekenis van $R'(80)$ een aantal gerelateerde begrippen zoals 'steilheid', 'toename van de remweg' en 'deling van delta *y* door delta *x*'.
In interview 3 blijft Dorien vooral de aspecten 'steilheid' en 'snelheid' aan elkaar relateren in verschillende opdrachten. Het redeneren over snelheid helpt haar betekenis te geven aan TK'(20). Ze zegt: "*Normaal is het zeg maar afstand, tijd. Dan kun je de snelheid uitrekenen op dat punt. Volgens mij kun je hier, als je die kosten hebt, de kosten zijn niet constant, volgens mij kun je hier uitrekenen dat als je 20 miljoen maakt de kosten per stuk hoger zijn dan als je 40 miljoen maakt. Dan zijn de kosten per stuk lager* [...] *dan weet je de steilheid*." In deze situatie helpt de vergelijking met snelheid Dorien niet verder, want door deze vergelijking komt ze uit op 'kosten per product'.
In interview 4 neemt het redeneren over verschillende aspecten van het concept afgeleide verder toe. Ze noemt verschillende aspecten zoals 'steilheid' en 'het delen van verschillen'. Ze gaat het redeneren over 'snelheid' breder gebruiken. Daarnaast gebruikt ze de notatie $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in verschillende situaties. Dit komt naar voren in de opdracht *Benzine* in interview 4 (zie tabel 6.4.2).

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Dorien gebruikt vanaf interview 1 in meerdere opdrachten de grafische en de symbolische representatie naast elkaar. De koppeling tussen de grafische en symbolische representatie is sterk. De numerieke representatie noemt of gebruikt ze slechts een enkele keer.
In interview 1 noemt Dorien het verschil tussen de snelheid op een interval en de snelheid op een punt maar kent ze nog geen procedures om de snelheid op een punt te berekenen. Vanaf interview 2 relateert ze steeds meer aspecten

van het concept afgeleide aan de verschillende situaties en aan elkaar. Ze noemt dan vooral aspecten zoals 'steilheid', 'delta *y* gedeeld door delta *x*' en daarnaast het fysische aspect 'snelheid'.

6.4.5 De ontwikkeling van Doriens wiskundige bekwaamheid

Bij Dorien is van interview 1 naar interview 2 een sterke ontwikkeling zichtbaar in gebruikte procedures en genoemde aspecten. Ze relateert in interview 2 de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren en noemt in dit interview vaak de aspecten 'steilheid' en de 'snelheid'. Ze gebruikt daarbij ook een derde procedure, namelijk het interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie. Ook relateert ze vanaf interview 2 hetzelfde aspect aan verschillende opdrachten waardoor ze vaker verschillende opdrachten met dezelfde procedures oplost.
In de daaropvolgende interviews 3 en 4 blijft Dorien de grafische en symbolische representatie combineren terwijl ze de numerieke representatie steeds minder gebruikt. In interview 4 noemt ze een extra aspect in verschillende situaties, namelijk het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ maar gebruikt ze hoofdzakelijk dezelfde procedures als in eerdere interviews.
Doriens werk kenmerkt zich doordat ze al vanaf het eerste interviews expliciet overeenkomsten tussen opdrachten verwoordt en daarnaast veel gebruikt maakt van de combinatie van grafische en symbolische procedures in de interviews 2, 3 en 4.
Dorien maakt een grote stap in de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van interview 1 naar 2, omdat ze in interview 2 over een repertoire beschikt dat zowel grafisch als symbolisch is, en zowel laag 3- als laag 4- procedures bevat. Ook is haar repertoire al in interview 2 samenhangend en relateert ze meerdere aspecten aan elkaar. Haar ontwikkeling stagneert in de daaropvolgende interviews. Ze vult haar repertoire in de daaropvolgende interviews nauwelijks verder aan en noemt een enkel extra aspect. Vanaf interview 2 tot en met interview 4 blijft haar wiskundige bekwaamheid ongeveer gelijk.

6.5 De ontwikkeling van leerling Elly

6.5.1. Achtergrond van de leerling

Elly is een leerling die het profiel Natuur en Gezondheid gekozen heeft met als keuzevak economie. Wiskundedocente P deelt haar in vwo 4 in als zwakke leerling en legt uit dat ze het moet hebben van inzet en veel oefenen. Ze zegt dat Elly het moeilijk vindt geleerde kennis in een nieuwe situatie te gebruiken. Ze verwoordt het zo: "*Je moet haar als docent alles uitleggen en voordoen*. *Als onderdeel b iets anders is, moet je ook b opnieuw voordoen* [...]; *kleine wijzigingen in de situatie, accentverschillen, zorgen ervoor dat ze weer vastloopt*."

Elly maakt in interview 1 een opmerking die dit bevestigt: "*Het cijfer viel tegen, want het was een hoofdstuk dat ik ontzettend goed snapte*. *Alleen de vragen werden precies andersom gesteld, dus toen kwam ik er gewoon niet meer uit*." En in interview 4: "*Voor mij is het niet zo 'als er dit uitkomt doe ik dat en dat, en dat is logisch'*. *Ik moet het voor mezelf in mijn hoofd hebben 'dit betekent dat' en 'als ik dat doe kom dat eruit'*."

In vwo 6 deelt dezelfde wiskundedocente Elly weer in als zwakke leerling. Ze zegt: "*Ze is heel ijverig, maar mist voor mijn gevoel inzicht*. *Bij haar twijfel ik tussen bovenin zwak of onderin gemiddeld, Maar juist dat gebrek aan inzicht doet mij haar bij zwak plaatsen*."

Elly is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B1 op het schoolexamen en op het centraal schriftelijk examen beide een 5,9.

6.5.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.5.1 wordt een samenvatting gegeven van Elly's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

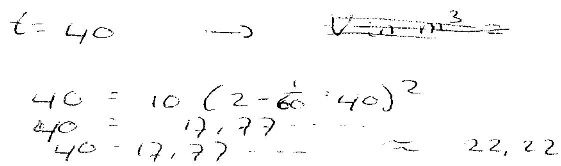
Tabel 6.5.1 Elly's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Elly gaat grafisch na of de grafiek precies voor t = 40 midden tussen de waarde V = 15 en V = 20 ligt. Vervolgens vult ze in de formule zowel voor V als voor t de waarde 40 in. Dit levert op 40 = 17,77 wat ze vervolgens omrekent naar 40 −17,77 ≈ 22,22 (figuur 6.5.1). Ze maakt deze berekening nog een keer maar nu met de afgelezen waarde 17,5, dus 17,5 = 10 (2 – 1/60 t)^2. Ze gebruikt de gegeven formule niet juist.
Interview 2, november 2006 Elly vult t = 40 in de formule in en berekent 17,777. Ze zegt: "*Op het moment dat er 40 minuten geweest zijn, dat er dan nog 17,777 kubieke meter in zit*." Ze zegt dat ze de 17,777 moet delen door 40 maar "*ze kan ook gebruiken hoeveel er al uit is*" . Omdat volgens Elly de snelheid afhangt van wat er nog in zit, berekent ze 17,778 / 40. Hoewel er gevraagd wordt naar een momentane uitstroomsnelheid (laag 3) gebruikt ze een deling waarbij ze het aanwezige volume door de verstreken tijd deelt.
Interview 3, mei 2007 Elly berekent dat er na 40 minuten nog 17 7/9 inzit, en dat er 80 minuten nodig zijn van 17,77 naar nul. Ze zegt: "*Dat kan dus niet omdat het geen rechte lijn is, omdat hij dus krom*

loopt, en omdat het afhangt van de hoeveelheid water die er inzit." Ze legt uit dat als de grafiek een rechte lijn was geweest, ze de uitstroomsnelheid zou kunnen berekenen.
De interviewer vraagt om een schatting. Ze schat 100 à 200, omdat het lijkt op het antwoord van onderdeel a, en het lager moet zijn dan bij onderdeel a "*omdat de snelheid minder wordt op het moment dat er minder water inzit*".
Ze benoemt dus het onderscheid tussen laag 2 , een gemiddelde uitstroomsnelheid, en laag 3, de momentane uitstroomsnelheid, maar ze noemt geen procedures voor het vinden van de momentane uitstroomsnelheid.

Interview 4, november 2007
Elly berekent hoeveel kubieke meter er nog in de tank zit. Als ze dat heeft gevonden, zegt ze*: "ik kan er niets mee, want ik weet nu hoeveel erin zit.*"
Ze blikt terug op onderdeel a en zegt dat het daar om het "*hele leeglopen*" ging, maar nu "*moet je het perse op een bepaald tijdstip hebben*". Na deze opmerking zegt ze *: "Ik zit nu te bedenken of ik een raaklijn ga tekenen; dan heb ik weer een gemiddelde snelheid als het goed is.*" Ze plot de grafiek maar tekent de raaklijn niet en zegt: "*Het is vast allemaal heel simpel.*"
Ze noemt dat het gaat om een momentane snelheid (laag 3) en twijfelt of ze een raaklijn kan tekenen, maar ze koppelt de raaklijn aan de gemiddelde snelheid (laag 2). Elly gebruikt de gegeven formule niet.

Elly heeft de opdracht *Watertanks-b* in geen enkel interview goed opgelost. Er is wel een ontwikkeling zichtbaar. In interview 1 vult ze de formule niet goed in (zie figuur 6.5.1). In interview 2 vult ze t = 40 wel goed in en zegt ze dat de snelheid afhangt van de hoeveelheid die er nog in zit. In interview 3 verwoordt ze dat ze bij een lineaire afname wel zou weten hoe ze de snelheid kan berekenen, maar omdat de grafiek 'krom' is kan ze niet de snelheid op één moment vinden.



Figuur 6.5.1 uitwerking van *Watertanks-b*, I-1

In interview 4 meldt ze voor het eerst dat ze misschien een raaklijn zou kunnen tekenen. In de interviews 2, 3 en 4 berekent ze met de formule het volume op t = 40, maar ze redeneert vervolgens steeds over de getekende grafiek. Er is een toenemend besef dat het om momentane verandering gaat en niet om een gemiddelde verandering, maar de procedures om de momentane uitstroomsnelheid te berekenen gebruikt ze in geen van de interviews.

Tabel 6.5.2 Elly's werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006
Elly vraagt zich af waar de h voor staat: "*Ik snap helemaal niet waar mijn h nu voor staat.*"
Ze gebruikt als getallenvoorbeeld a = 10 en h = 4 en zegt: "*Dan wordt het dus 10 + 4 – 10 gedeeld door 4, maar wat dat dan betekent, geen idee.*" Ze kan de notatie niet goed interpreteren.

Interview 3, mei 2007 Elly zegt: "*Ik snap niet wat die h is, en waarom je die zelf mag kiezen.*" Ze gebruikt getallen uit de tabel en schrijft op: 1,3(10+10) – 1,3(10) / 10. Ze merkt op: "*Ik krijg er een getal uit dat ik al heb*".
Interview 4, november 2007 Elly verandert de *h* in een *x* en zegt: "*Dan zit ik ook niet steeds te denken dat h de hoogte is of zo*." Ze vult in 1,3(10+3) – 1,3(10) / 10 en zegt: "*Ik snap niet wat ze met die formule willen. Wat het betekent, en waarvoor je het gebruikt 'geen idee'*."

In tabel 6.5.2 wordt Elly's werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Het blijkt dat het Elly niet lukt de formule te interpreteren. Ze interpreteert in de interviews 3 en 4 de notatie $V(a + h)$ als $Va + Vh$. Ze doet geen uitspraken waarin ze de formule relateert aan het concept afgeleide.

6.5.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.5.3 is weergegeven welke procedures Elly in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.5.3 Door Elly gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1									●	○
I-2	●		○						○	
I-3	●○			○					●	○
I-4	●			○					●	

●: accuraat uitgevoerd; ʘ: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure

Elly kiest of noemt in interview 1 twee keer een adequate procedure. In de interviews 2, 3 en 4 kiest ze respectievelijk drie, vijf en drie maal een verschillende procedure. De genoemde adequate procedures zijn vooral natuurkundeformules bij natuurkundige opdrachten en een numerieke intervalmethode bij de opdracht *Watertanks-a* en economieformules bij de opdrachten *Monopolie* en *Kosten*. In de interviews 3 en 4 overweegt ze een keer of ze de raaklijnmethode kan gebruiken.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire

Zoals uit tabel 6.5.3 blijkt beschikt Elly over een smal repertoire en lost ze maar weinig opdrachten op. Elly zoekt bij elke opdracht naar procedures en formules die volgens haar bij de betreffende situatie horen. Ze kiest bijvoorbeeld in interview 4 bij de opdracht *Kogel* voor de formule $v = at$ en zegt daarover: "*Ik heb een formule nodig waar die a in staat en volgens mij mag die gewoon; ja want a is dan op het moment dat je het over vallen hebt gelijk aan g*." Ze kan geen andere procedures noemen om de gevraagde valsnelheid te berekenen.

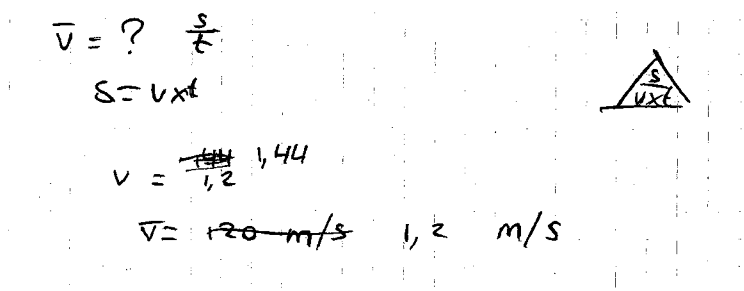
Indicator 1.3 De samenhang in repertoire

Elly's procedures zijn per situatie verschillend en gekoppeld aan het type opdracht. Ze relateert procedures niet aan elkaar. Hieronder volgen enkele voorbeelden.

Bij natuurkunde heeft ze de raaklijnmethode geleerd. Ze spreekt in de interviews een aantal maal over raaklijnen, maar dan vooral als procedure om de snelheid te vinden bij een *s*-*t*-grafiek. Bij de opdracht *VT-diagram* in interview 3 zegt ze bijvoorbeeld : "*Dan moet je een lijn trekken bij dat stukje dat krom loopt* [wijst het aan in de grafiek]. *Daar moet je dan een raaklijn aan tekenen, en dan kun je daar de steilheid van bepalen*. *Hoe je dat precies deed dat weet ik ook niet precies meer*."

Elly noemt ook meerdere malen de formule $v = \frac{s}{t}$. In interview 1 berekent ze bijvoorbeeld de gemiddelde snelheid van een autootje met de formule $s = v \times t$. De formule vult ze betekenisloos in, zoals blijkt uit haar opmerking: "*Ja s is v keer t is een standaardformule, die kun je dan in een driehoekje zetten, en als je v wilt hebben dan leg je hier je vinger op en dan kun je zien dat het s gedeeld door t, wil je t hebben dan s gedeeld door v en s is v maal t*" (figuur 6.5.2). In interview 2 wil ze deze formule weer gebruiken bij de opdracht *Kogel*. Ze twijfelt of de formule v = t/s of v = s/t was. Ze zegt: "*ik heb het volgens mij altijd over s gedeeld door t en niet over t gedeeld door s*", waarna ze de gemiddelde snelheid over de eerste 0,24 seconden berekent.

De economie-opdrachten probeert ze op te lossen met procedures die ze bij economie heeft geleerd. Ze zegt bijvoorbeeld in interview 1: "*Ik ben nou echt heel economisch aan het nadenken* […], *in economische termen* TO *is* TK *en dat soort dingen*.[…] MO *is* MK *heb je de grootste marginale winst, geloof ik, dat soort dingen* […]. *Ik weet niet precies meer wat dat inhield, o wat was dat nou, dan zijn de marginale opbrengsten gelijk aan de marginale kosten, en wat had je dan? Ik weet al niet eens meer wat je dan had, oh wat erg*."



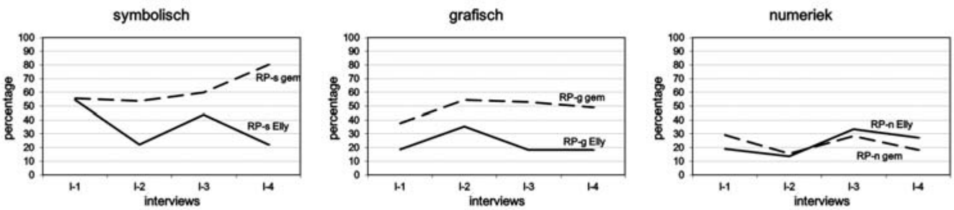
Figuur 6.5.2 Berekening van Elly bij *Tikkerband-a* (I-1)

In interview 3 wordt bij de opdracht *Kosten-a* gevraagd naar de betekenis van TK′(20). Elly zegt dat ze wel weet hoe ze de afgeleide kan berekenen en 20 kan invullen, maar ze zegt dat ze niet weet wat ze dan precies krijgt. Bij de opdracht *Kosten-b* wordt gevraagd de maximale winst te berekenen. Ze zegt: "*Maximale winst is bij* MO = MK*, marginale opbrengst is marginale kosten, even kijken hoor, het is lang geleden*. *Is de afgeleide van* TK *dan gelijk aan* MK?"

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
Elly lost de meeste opdrachten niet goed op. Procedures zoals symbolisch differentiëren, raaklijnmethode of klein-intervalmethode gebruikt ze niet. Ze probeert bij natuurkundige opdrachten formules die ze bij natuurkunde geleerd heeft te gebruiken, bij economie-opdrachten valt ze soms terug op economische regels, waarbij vooral de regel MO = MK naar voren komt. Ze legt geen relatie met wiskundige procedures. Er is nauwelijks ontwikkeling zichtbaar in de loop van de vier interviews.

6.5.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties
In figuur 6.5.3 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Elly afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.



Figuur 6.5.3 Verloop van de representatiepercentages van Elly

Elly scoort laag op alle representaties (zie figuur 6.5.3). Vooral de grafische en symbolische representatie gebruikt ze veel minder dan gemiddeld. In interview 1 komt de symbolische representatie iets vaker voor, omdat ze bij meerdere opdrachten eerst de formule kiest om een uitkomst te berekenen of om de formule in te voeren in de rekenmachine. Ze vindt het moeilijk de symbolische representatie goed te interpreteren. Dat blijkt bijvoorbeeld in interview 1 als ze bij de opdracht *Watertanks-b* zowel voor de afhankelijke als de onafhankelijke variabele een waarde invult (figuur 6.5.1). Ook het interpreteren van de notatie $V(a + h) - V(a)$ levert in elk interview problemen op (tabel 6.5.2).
Vanaf interview 2 doet ze wel uitspraken over afgeleiden. Ze zegt bijvoorbeeld in interview 2 bij de opdracht *Remweg*: "*Waar staat zo'n kommaatje voor?* [...]

Bij wiskunde is het een afgeleide." In interview 3 berekent Elly de afgeleide van een derdegraads functie als er gevraagd wordt naar de betekenis van TK'(20). Het lukt haar echter niet er een betekenis aan te geven. In interview 4 vertelt ze meer over haar kennis van afgeleiden. Bij de opdracht *Remweg* vraagt de interviewer wat een afgeleide is. Ze reageert: "*Nou je hebt, ik kan wel een voorbeeld geven*. *Als je een formule hebt f(x) = x*^{2} *+ 3x + 20 of zo, dan haal je dus alle exponenten één naar beneden, zodat 2x + 3 en 20 vervalt, x is dus dan is de afgeleide is gelijk aan dat*." Ze noemt dat ze afgeleiden kan gebruiken bijvoorbeeld voor het berekenen van raaklijnen of buigpunten, maar in de vier interviews gebruikt ze nooit een afgeleide bij berekenopdrachten.
Alhoewel Elly ook weinig tabellen gebruikt, is het numerieke representatie-percentage ongeveer vergelijkbaar met het gemiddelde van de tien leerlingen. Bij *Watertanks-a* gebruikt ze een numerieke methode om de uitstroomsnelheid te berekenen. De grafische representatie gebruikt Elly minder dan gemiddeld. In haar uitspraken blijkt dat ze wel beseft dat de steilheid van een grafiek van belang is. Ze gebruikt echter geen grafische procedures zoals de raaklijnmethode, de helling van een koorde of de grafiek van de afgeleide.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

Elly noemt in de verschillende interviews weinig aspecten (zie tabel 6.5.4) en gebruikt in één interview nooit bij verschillende opdrachten eenzelfde procedure. In interview 1 gebruikt ze twee keer het aspect 'steilheid' om aan te geven dat de twee grafieken in de opdracht *Watertanks* nooit met dezelfde steilheid naar beneden gaan.
In interview 4 noemt ze het aspect 'richtingscoëfficiënt' als ze bij de opdracht *Remweg-b* zegt: "*Als je de afgeleide gelijk stelt aan nul, krijg je de richtingscoëfficiënt, toch*?" Bij deze opdracht komt ook naar voren dat ze de relatie tussen afgelegde weg en snelheid wel eens gezien heeft want ze zegt: "*De afgeleide van een formule van v geeft een formule van s, uit mijn hoofd*." Uit al deze uitspraken blijkt dat ze de relaties tussen verschillende aspecten van het concept afgeleide niet goed kan verwoorden en gebruiken.

Tabel 6.5.4 Het aantal door Elly genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	2			1			1 (MK)
I-2							
I-3	1						1 (MK)
I-4			2	1			

Een laatste voorbeeld hiervan is haar verwarring betreffende 'gemiddelde snelheid' en 'snelheid op een moment'. In interview 2 spreekt ze over de formules $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ en $v = \frac{s}{t}$. Ze merkt op: "*Nou het is in principe ongeveer hetzelfde* *maar de een is voor de gemiddelde snelheid en de ander is voor de snelheid op dat punt en deze* [wijst naar de tweede formule] *is voor snelheid op het punt*."

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Elly maakt in verhouding met de andere leerlingen weinig gebruik van de symbolische en de grafische representaties. Ze noemt ook weinig aspecten van het concept afgeleide en de relaties tussen deze aspecten kan ze niet goed verwoorden.

6.5.5 De ontwikkeling van Elly's wiskundige bekwaamheid

In alle interviews blijkt Elly betekenisloos gememoriseerde procedures te gebruiken. Voor elk type opdracht bedenkt ze welke procedure ze voor die opdracht heeft geleerd. Ze geeft tijdens het interview ook vaak aan dat ze dingen voor een toets wel heeft geleerd, maar dat ze het ook snel weer vergeet. Ze verzucht vaak dat ze het maken van deze opdrachten erg vindt, vooral in situaties waarin ze nog wel enigszins weet welke procedure te gebruiken is, maar niet tot een oplossing kan komen.
Haar oplossingen zijn steeds gebonden aan situaties. De vraag naar maximale winst roept direct de reactie MO is MK op. In een natuurkundige situatie waarin gevraagd wordt naar snelheid, noemt ze vaak de formule $v = \frac{s}{t}$. Ze relateert nauwelijks aspecten van het concept afgeleide aan de verschillende situaties en noemt geen relaties tussen de verschillende aspecten. Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide is bij Elly niet zichtbaar.

6.6 De ontwikkeling van Karin

6.6.1 Achtergrond van de leerling

Karin is een leerling die het profiel Natuur en Gezondheid gekozen heeft met als keuzevak geschiedenis. Aan het begin van dit onderzoek beoordeelt wiskundedocent A van vwo 4 haar als gemiddelde tot goede leerling en zegt: "*Ze doet goed mee in de les en maakt haar huiswerk*." Hij zegt wel dat ze bij complexere opdrachten met meer denkstappen minder goed meedoet: "*Als het complexer of abstracter wordt laat ze het lopen in de les*."
Haar wiskundedocent B in vwo 5 en 6 vindt haar een goede leerling, mede doordat ze hard werkt. Hij zegt daarover: "*Dat is echt iemand van doen, doen, doen en dan leer je wiskunde. En ze heeft een goed geheugen*." Hij geeft aan dat ze beter is geworden in opdrachten met meer denkstappen: "*Lastige sommen, met meer denkstappen, wordt wel iets beter. Vorig jaar vroeg ze al snel hoe ze iets aan moest pakken. Ik denk dat ze daar nu beter in is. Ze heeft nu het zelfvertrouwen dat het goed is*."

Ze geeft in vwo 4, maar meer nog in vwo 6, aan dat ze haar huiswerk voor wiskunde goed doet. Volgens haar komt dat doordat bij wiskunde het huiswerk in de les wordt besproken. In de les wordt aan de leerlingen gevraagd wat hun antwoord is en de gemaakte opdrachten worden in hoog tempo besproken. Dat dwingt leerlingen hun huiswerk te doen, aldus Karin.
Ze is geslaagd met voor wiskunde-B1 op het schoolexamen een 8,7 en op het centraal schriftelijk examen een 9,6.

6.6.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.6.1 wordt een samenvatting gegeven van Karins werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.6.1 Karins werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Karin berekent $V(40)$=17,778 en zegt: "*Nou je moet hem gewoon invullen, want 40 is gegeven. Dan moet je t invullen en dan weet je V.*" Ze noemt twee controlemethoden, de vergelijking $V(t)$ = 17,8 oplossen waar t = 40 uit moet komen, en aflezen in de grafiek. Ze interpreteert dus $V(40)$ in de formule en in de grafiek als uitstroomsnelheid.
Interview 2, november 2006 Karin rekent eerst $V(40)$ uit. Ze tekent vervolgens een raaklijn en zegt: "*Het is natuurlijk ook mogelijk dit getal te delen door dat getal*" waarna ze eerst opschrijft $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ maar dit doorstreept en opschrijft $\frac{V}{t}=\frac{17{,}78}{40}=-0{,}445$ liter/min. Ze deelt daarmee de aanwezige hoeveelheid water op t = 40 door de verstreken tijd. Het doorstrepen van de delta's verklaart ze met: "*Dit is niet het verschil tussen twee tijden, dus dan moet je geen delta opschrijven.*" Ze doet enkele uitspraken óver de opdracht. Ze zegt: "*Ik vind het een beetje een aparte vraag;totaal anders dan we op school krijgen.*" Soortgelijke opmerkingen maakt ze in alle interviews. Karin legt vervolgens uit "*dat je het ook kan uitrekenen met die delta; dat is weer hetzelfde als de vorige opgave*", waar ze de raaklijnmethode heeft gebruikt. Ze schrijft op $\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{26-5}{20-68}=-0{,}4375$ liter/min. Ze constateert dat er ongeveer hetzelfde uitkomt. Ze herkent dus dat een eerdere opdracht en deze opdracht beiden met de raaklijnmethode opgelost kunnen worden, maar ze gebruikt bij deze opdracht niet, net als bij de eerdere opdracht, de afgeleide functie. De twee gevonden antwoorden zijn volgens Karin ongeveer gelijk. Ze kijkt terug met een opmerking waarin ze de raaklijnmethode als natuurkundige procedure kwalificeert en haar eerste procedure (V/t) als wiskundig: "*nou bij natuurkunde zouden ze gewoon willen dat je die raaklijn trekt. Ik denk dat dit weer meer wiskundig is, dat je echt het punt pakt. En natuurkundig is dan meer dat je een schatting doet met de raaklijn.*" Karin gebruikt dus twee procedures, waarvan alleen de raaklijnmethode een adequate procedure is.
Interview 3, mei 2007 Karin zegt dat ze hier een raaklijn moet tekenen. Ze tekent de raaklijn en zegt dan: "*Of je kan de afgeleide nemen en dan 40 invullen.*" Ze voert beide procedures uit, eerst berekent ze V' met de kettingregel (-4/9 liter/min) en vervolgens berekent ze de richtingscoëfficiënt van de raaklijn met behulp van twee punten op de lijn en komt op -0,45 liter/min. Ze constateert: "*Het scheelt één tiende; en deze* [wijst naar de afgeleide] *is*

exact, wiskundig, en deze [wijst naar de raaklijn] *natuurkundig*." Bij wiskunde zou je volgens haar nooit een raaklijn mogen tekenen, want "*dit doe je bij wiskunde exact*". Ze berekent dus zowel met symbolisch differentiëren als met de raaklijnmethode de uitstroomsnelheid.
Interview 4, november 2007 Karin noemt eerst de raaklijnmethode. Ze wijst twee punten op de raaklijn aan, namelijk de snijpunten met de assen, en zegt dat ze het verticale verschil door het horizontale verschil kan delen, namelijk 35:80. Ze zegt dat ze dit geen nauwkeurige manier vindt. Ze merkt op dat ze ook de afgeleide kan nemen. Ze schrijft de gegeven formule als tweedegraads polynoom en berekent de afgeleide met een rekenfout. Het antwoord dat ze vindt is -1/9 m^3/min. Ze merkt niet op dat dit antwoord afwijkt van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Ze geeft aan dat ze bij deze opdracht geen andere procedures zou weten. Karin berekent, net als in het vorige interview, met symbolisch differentiëren en met de raaklijnmethode de uitstroomsnelheid op laag 3. Ze merkt niet op dat de twee antwoorden verschillen.

Uit tabel 6.6.1 blijkt dat Karin in interview 1 in plaats van $V'(40)$ de functiewaarde $V(40)$ berekent en er van uitgaat dat dit de gevraagde uitstroomsnelheid is. Ze verwijst ook naar het bijbehorende punt op de grafiek. Vanaf interview 2 is het haar duidelijk dat het niet gaat om de functiewaarde zelf maar om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. In elk van de interviews 2, 3 en 4 tekent ze een raaklijn, waarbij ze opmerkt dat de raaklijn een natuurkundige techniek is die niet exact is. Daarnaast noemt ze in interview 2 een niet adequate procedure, namelijk v/t, waarmee ze naar haar zeggen "*echt het punt pakt*". Ze legt in interview 2 in deze opdracht niet de relatie tussen de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren, terwijl ze dat in de voorgaande opdracht in hetzelfde interview (*Kogel*) wel had gedaan. In de interviews 3 en 4 gebruikt ze de raaklijnmethode en de afgeleide naast elkaar om de momentane uitstroomsnelheid te berekenen. In interview 3 doet ze dat accuraat, in interview 4 vindt ze door een rekenfout een onjuist antwoord.
Bij deze opdracht blijkt dat ze in de loop van het onderzoek steeds beter een relatie legt tussen de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren, waarbij ze in interview 3 expliciet opmerkt dat de raaklijn een natuurkundige, onnauwkeurige procedure is en de afgeleide een wiskundige, exacte procedure.

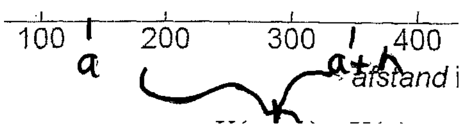
Tabel 6.6.2 Karins werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Karin zegt direct na het lezen van de opdracht dat het om het gemiddeld verbruik gaat. Ze legt uit waarom ze deze interpretatie noemt. Ze tekent een koorde over een langer traject en zegt: "*Nou je hebt a dat is bijvoorbeeld hier plus iets daarbij* [tekent begin en eindpunt van de koorde], *dus zeg maar dit stuk* [wijst naar de koorde] *deel je door h. Nou ik weet niet maar ik denk dat dat het gemiddelde is*." Karin interpreteert de formule dus grafisch als koorde (laag 2), en noemt de uitkomst van de berekening in termen van de situatie 'het gemiddeld verbruik'.
Interview 3, mei 2007 Karin zegt dat ze helemaal niet weet wat er wordt bedoeld, ze weet niet wat de *h* is. Ze

geeft een uitleg waarbij ze twee punten op de grafiek aanwijst en opmerkt: "*Je wil het verschil tussen iets weten, en dat deel je dan weer door die h.*" En vervolgens: "*Het verbruik per h deel je door h, maar voor de rest weet ik het niet*".
Tenslotte associeert ze de formule nog met de versnelling of iets met de helling.

Interview 4, november 2007
Karin tekent twee punten op de grafiek, namelijk (100, 10) en (450, 35). Ze maakt een berekening met deze punten waarbij ze de notatie niet goed interpreteert. Ze doet een uitspraak over de opdracht: "*Ik snap die hele vraag weer niet. Vorige keer had ik de hoogte gezegd volgens mij omdat ik dacht h is hoogte, dat slaat nergens op, dus ik weet het niet.*"
De interviewer vraagt haar nog verder na te denken over de formule waarna ze tot een goede interpretatie komt. Ze tekent in de grafiek het horizontale verschil tussen a en $a + h$ (figuur 6.6.1) en zegt dat je het verschil in verbruik moet delen door het verschil in afstand. Vervolgens zegt ze: "*De formule is gewoon het gemiddelde verbruik? Stel je gaat van hier naar hier en je gebruikt zoveel. Hoeveel je dan gemiddeld gebruikt. Je deelt door de afstand; de snelheid van het gebruik, ja, dat denk ik wel.*"
Karin interpreteert dus de situatie met behulp van de grafische representatie op laag 2.
Na deze interpretatie zegt ze, direct volgend op de uitspraak dat het gaat om de snelheid van verbruik: "*Ja, want je doet die min die, gedeeld door dat tussending* [wijst naar de *h*] *en dat is ook wat je doet als je de afgeleide maakt, dan deel je ook door de tijd zeg maar, niet de afstand. Zoiets denk ik*".
Aan de hand van haar redenering over de formule associeert ze de formule met de afgeleide, waarbij ze aangeeft dat je bij de afgeleide door de tijd deelt en niet door de afstand.

In tabel 6.6.2 wordt de Karins werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Bij de opdracht *Benzine* maakt Karin in alle interviews duidelijk dat ze de vraag niet goed begrijpt en dat ze niet weet wat de *h* betekent. In de interviews 2 en 4 interpreteert ze vervolgens de benzineformule als gemiddeld verbruik. In interview 2 zegt ze dat meteen nadat ze de formule bekeken heeft, als in een eerste opwelling, maar wel weifelend. In interview 4 is ze hier zekerder over. Ze interpreteert de formule grafisch als koorde, maar koppelt dit niet aan haar interpretatie van gemiddeld verbruik in de situatie. Ze benoemt dat het hier gaat om het verbruik op een afstand gedeeld door de afgelegde afstand (figuur 6.6.1).



Figuur 6.6.1 Karin geeft het verschil aan op de horizontale as (I-4, nov 2007)

Ze zegt de formule niet te herkennen, maar legt in interview 4 wel de relatie met het concept afgeleide. Deze relatie tussen de benzineformule en het concept afgeleide lijkt gebaseerd op twee aspecten, namelijk dat de formule de 'snelheid van verbruik' betreft en dat het gaat om een 'deling van twee toenames'. Ze zegt er wel bij dat je bij de afgeleide door de tijd deelt en niet door de afstand.

Ze relateert in interview 4 meer aspecten van het concept afgeleide aan de benzineformule dan in interview 2. Haar interpretaties zijn steeds gekoppeld aan laag 2, ze spreekt niet over mogelijke variatie in de waarde van h of het limietproces.

6.6.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.6.3 is weergegeven welke procedures Karin in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.6.3 Door Karin gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●◎									
I-2	●		○	●●◎			◎○			
I-3				●◎			●●○		●◎	
I-4				●○○			●●◎◎○	●	○	

●: accuraat uitgevoerd; ◎: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd. De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure

Karin kiest in de opeenvolgende interviews respectievelijk twee, zeven, zeven en tien maal een adequate procedure. In interview 1 lost ze twee opdrachten op met de intervalmethode. Vanaf interview 2 gebruikt ze vooral twee procedures, namelijk de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren, en een enkele keer een andere procedure, zoals een natuurkundeformule. In interview 2 gebruikt ze vooral de raaklijnmethode en enigszins het symbolisch differentiëren, in interview 4 is dit andersom. Als Karin voor een opdracht een procedure heeft bedacht, denkt ze vervolgens niet lang meer na over alternatieve procedures. Als ze wel alternatieve procedures bedenkt, voert ze die in veel gevallen niet meer uit (zie bijlage D).

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire

In interview 1 gebruikt Karin één adequate procedure. Bij de start van interview 2 combineert ze één keer de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren bij de eerste opdracht (zie bijlage D). Maar bij de volgende opdrachten in dit interview, zoals *Watertanks-a* en *b* (zie tabel 6.6.1) en M*onopolie-a* en *b*, beperkt Karin zich tot grafische procedures en gebruikt ze geen afgeleide functies meer. In interview 3 combineert ze weer de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren. Daarnaast gebruikt ze bij de opdracht *Tikkerband* natuurkundeformules. In interview 4 gebruikt ze vaker symbolisch differentiëren en voert ze de raaklijnmethode meestal niet meer

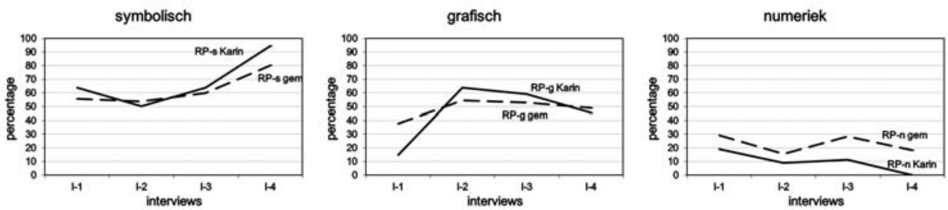
uit. Dat blijkt bijvoorbeeld bij de opdracht *Watertanks-c*. Door een rekenfout berekent ze voor het tijdstip waarop beide tanks even snel leeglopen t = 0 in plaats van t = 60. Ze zegt dat ze dit kan controleren door net zo lang raaklijnen te tekenen "*tot één raaklijn gelijk is aan 1/3*". Ze voert deze werkwijze echter niet uit. Een tweede voorbeeld van Karins voorkeur voor differentiëren boven grafische procedures in interview 4 is zichtbaar bij de opdracht *Monopolie*, waar ze geen enkele grafiek meer plot, maar alleen berekeningen maakt met afgeleide (*Monopolie-b*) en dubbele afgeleide (*Monopolie-a*).
Karin gebruikt in de interviews 2, 3 en 4 drie à vier procedures en beschikt daarmee in alle interviews over een smal repertoire.

Indicator 1.3 De samenhang van het repertoire
In interview 2 relateert Karin de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren nauwelijks aan elkaar. Ze gebruikt de afgeleide functie één keer, bij de eerste opdracht. Ze zegt expliciet dat de raaklijnmethode een natuurkundige procedure is, die ze niet nauwkeurig vindt, terwijl de afgeleide de wiskundige en exacte procedure wordt genoemd.
In interview 3 is de relatie tussen de raaklijnmethode en differentiëren sterker geworden. Ze noemt of gebruikt bij verschillende opdrachten zowel de grafische als symbolische representatie naast elkaar (tabel 6.6.1). In dit interview zegt ze bijvoorbeeld bij *Tikkerband-b*, nadat ze met de raaklijnmethode de snelheid heeft gevonden dat, als er een formule was, ze met differentiëren de gevraagde snelheid kan vinden. Hoewel Karin in dit interview de grafische en symbolische procedures aan elkaar relateert, spreekt ze meerdere keren haar voorkeur uit voor symbolische procedures. In interview 3 zegt ze bijvoorbeeld: "*Ik ben meer van de wiskundige oplossingen; ik hou niet zo van raaklijnen*."
In interview 4 zegt Karin niet meer dat de raaklijnmethode een natuurkundemethode is, maar uit haar handelen blijkt dat deze procedure niet haar voorkeur heeft. In interview 4 vindt ze bijvoorbeeld bij twee opdrachten met symbolisch differentiëren een verkeerd antwoord, maar ze controleert niet met de raaklijnmethode. Ze noemt wel dat de raaklijnmethode te gebruiken is.
Wat betreft de relatie tussen natuurkundeformules en bij wiskunde geleerde procedures: in interview 3 verwoordt ze expliciet de relatie tussen formules voor de valbeweging en differentiëren bij de opdracht *Tikkerband-a*: "*Je had drie van die formules:* $x = \frac{1}{2}at^2$ *en dan is v, dat moest je dan differentiëren, dat is* $v = at$. *Alleen, ik heb de versnelling niet, dus dat slaat nergens op* [krast de formules weer door]." Ook in interview 4 merkt Karin bij de opdracht *Kogel* op dat in de formule voor de hoogte de standaardformule $h = \frac{1}{2}gt^2$ zichtbaar is. Ze gebruikt voor deze opdracht geen natuurkundeformules om de valsnelheid te vinden.

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
In interview 2 gebruikt Karin vooral grafische procedures, een enkele keer gecombineerd met symbolisch differentiëren. In interview 3 gebruikt ze bij meerdere opdrachten zowel grafische als symbolische procedures. In interview 4 heeft symbolisch differentiëren de overhand gekregen en gebruikt ze de raaklijnmethode zelden. Soms noemt ze in interview 4 wel een grafische procedure, maar voert deze vervolgens niet uit om een symbolisch berekend antwoord te controleren. Berekeningen met tabellen komen na interview 1 niet meer voor. Vooral in interview 3 en enigszins in interview 4 relateert Karin natuurkundeformules aan procedures die ze bij wiskunde geleerd heeft.

6.6.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties
In figuur 6.6.2 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Karin afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.



Figuur 6.6.2 Verloop van de representatiepercentages van Karin

In interview 1 lost Karin weinig opdrachten op. Ze probeert indien mogelijk met formules te werken. De representatiepercentages voor de grafische en numerieke representatie zijn in interview 1 laag. In alle interviews speelt de ontbrekende motivatie om opdrachten op verschillende manieren op te lossen een rol. Daarnaast geeft ze bij berekenopdrachten en vooral bij redeneer-opdrachten aan dat ze de opdrachten anders vindt dan ze gewend is. In interview 2 gebruikt ze meerdere keren de grafiek om een opdracht op te lossen. Vanaf interview 3 gebruikt ze de symbolische representatie bij alle berekenopdrachten en gaat ze minder grafische procedures gebruiken. In redeneeropdracht spreekt Karin vooral in termen van de situatie.
De numerieke representatie gebruikt ze nauwelijks. Eén keer, bij de opdracht *Kogel* in interview 2, spreekt ze over toenames op krimpende intervallen: "*We hebben eens ooit een manier geleerd, dan moest je iets van 62* [schrijft op 62 + s] *plus een stapje doen of zo en dan moest je die invullen in die grafiek.* [...] *Uiteindelijk kun je s bereken of zo maar ik weet niet meer wat het was.*" In deze

uitspraken refereert Karin aan het limietproces (zie hoofdstuk 5, figuur 5.4), maar ze brengt dat niet duidelijk onder woorden.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

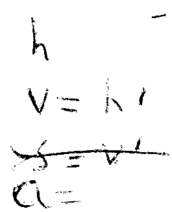
In de verschillende interviews noemt Karin enkele keren het aspect ‘steilheid’ (zie tabel 6.6.4). Dit doet ze bij natuurkundige opdrachten als *Steen*, *Kogel* en *VT-diagram*. Vanaf interview 2 speelt het aspect ‘snelheid’ een centrale rol in haar redeneringen. Tijdens het oplossen en interpreteren van opdrachten gebruikt ze vaak uitspraken die gerelateerd zijn aan de regels uit de kinematica, namelijk $v = s'$ en $a = v'$ (zie figuur 6.6.4). Bij verschillende opdrachten houdt ze een redenering over snelheid als afgeleide waardoor ze deze opdrachten met eenzelfde procedure oplost. In interview 2 is dat de raaklijnmethode, in interview 4 meestal symbolisch differentiëren. Het redeneren over snelheid wordt hieronder met voorbeelden toegelicht.

Tabel 6.6.4 Het aantal door Karin genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	1						
I-2	1	1		2			
I-3	1		2	3			
I-4				2	1		

Bij de opdracht *Watertanks-c* in interview 2 overweegt ze of ze de afgeleiden van de twee watertankformules aan elkaar gelijk mag stellen. Ze zegt: “*De afgeleide dat is* […], *dit was altijd hoogte, versnelling, of dit was snelheid en versnelling* (figuur 6.6.4). *En dit* [wijst naar *v*] *was de afgeleide van die* [wijst naar *h*]*, en dit* [wijst naar s] *was de afgeleide van die* [wijst naar *v*] *eigenlijk maar die leidde je eigenlijk nooit af*. *Dus ik denk ‘laat ik die maar afleiden dan’ want V* (het volume, GR) *is vast wel hetzelfde als h*.”

Volgens Karins redenering is het volume van het water in de tank gelijkwaardig met de hoogte. Ze beredeneert dat de afgeleide van de hoogte de snelheid geeft, dus hier geeft de afgeleide van het volume *V* de uitstroomsnelheid.



Figuur 6.6.4 Aantekening van Karin bij het oplossen van *Watertanks-c* (I-2)

Karin komt in interview 2 op deze regel terug als ze in de opdracht *Ballon-b* de gemiddelde versnelling berekent. Nadat ze enige tijd met deze opdracht bezig is geweest, brengt ze een wijziging aan in haar aantekening (zie figuur 6.6.4). Ze streept de onderste regel door en zet eronder 'a=' om hiermee de versnelling aan te geven. Ook bij *Remweg-c* in interview 2 komt ze op de regel in figuur 6.6.4 terug als ze zegt: "*Dit is weer hetzelfde, dit is de afstand, dit is de snelheid* [omcirkelt de *R'*], *dit is de versnelling* [omcirkelt de *R''*], *dus de versnelling als functie van de snelheid*."
Ook in interview 3 komt het relateren van het aspect 'snelheid' aan verschillende opdrachten weer naar voren. Bij de opdracht *Kosten* bijvoorbeeld gebruikt ze weer een redenering over 'snelheid'. Ze zegt over de betekenis van TK'(20): "*Dan krijg je de snelheid waarmee de totale kosten stijgen op het tijdstip 20. Op tijdstip 20, op de afzet 20 miljoen, dat is op dat moment de stijging van de kosten*." In deze economie-opdracht, waarin de tijd niet de onafhankelijke variabele is, is het woord 'snelheid' onduidelijk. Dat blijkt ook bij de opdracht *Remweg*. Over de betekenis van *R'*(80) zegt ze direct: "*R accent, de snelheid waarmee je remt als je 80 km per uur rijdt is 1,15. En opdracht c is de vertraging waarmee je remt is groter dan nul*." Na deze uitspraak maakt Karin duidelijk dat ze het vreemd vindt dat ze de snelheid $v = 80$ moet invullen om een snelheid te krijgen.

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
In interview 2 gebruikt Karin vooral de grafische representatie. In de loop van de interviews 3 en 4 verschuift haar voorkeur van de grafische naar de symbolische representatie. De numerieke representatie wordt door Karin nauwelijks ingezet. Vanaf interview 2 is 'snelheid' het centrale aspect in haar berekeningen en redeneringen. Ze noemt dat de afgeleide de snelheid oplevert, en gebruikt dit gegeven in redeneringen en berekeningen. In opdrachten waar de onafhankelijke variabele niet 'tijd' is, helpt het aspect 'snelheid' haar niet om formules te interpreteren.

6.6.5 De ontwikkeling van Karins wiskundige bekwaamheid

Karin combineert in de interviews 2, 3 en 4 in meerdere opdrachten de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren. In de loop van de interviews 2, 3 en 4 verschuift haar werkwijze van vooral grafisch werken naar vooral symbolisch werken. Ze gebruikt in interview 2 nog niet vaak de symbolische representatie omdat ze niet zeker is of ze opdrachten met differentiëren kan oplossen. In interview 4 probeert ze alle opdrachten op te lossen met symbolisch differentiëren en werkt ze andere procedures nauwelijks meer uit. Ook grafische aspecten noemt ze in de interviews 2 en 3 nog wel maar in interview 4 niet meer. Karin spreekt meerdere malen uit dat ze grafische

procedures niet nauwkeurig vindt en dat ze een voorkeur heeft voor het rekenen met formules omdat dat volgens haar een exacte werkwijze is.
Karin gebruikt enkele malen natuurkundeformules en in haar redeneringen speelt het aspect 'snelheid' een centrale rol. Ze noemt meerdere keren dat de afgeleide de snelheid oplevert. Ze expliciteert in interview 3 dat de natuurkundeformule $v = at$ ontstaat door het differentiëren van de formule $x = \frac{1}{2}at^2$. Ze maakt daarmee duidelijk dat ze deze natuurkundeformules niet als geïsoleerde formules gebruikt. Ze relateert de natuurkundeformules voor beweging expliciet aan het differentiëren bij wiskunde.
Karins werk kenmerkt zich doordat ze in alle interviews weinig verschillende procedures uitvoert. Ze kiest vaak één procedure en noemt weinig verschillende alternatieve procedures of voert alternatieve procedures niet uit.
Karins wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide ontwikkelt zich vooral doordat samenhang in haar smalle repertoire sterker wordt. Dit blijkt vooral uit de relaties die ze legt tussen de raaklijnmethode, het symbolisch differentiëren en natuurkundeformules, waarbij symbolisch differentiëren uiteindelijk centraal staat in haar werk. Ook versterkt de relatie die ze legt tussen het aspect 'snelheid' en het berekenen van de afgeleide functie.

6.7 De ontwikkeling van Maaike

6.7.1. Achtergrond van de leerling

Maaike is een leerling die het profiel Natuur en Gezondheid heeft gekozen met het keuzevak Spaans. Aan het begin van dit onderzoek deelt wiskundedocent A, van vwo 4, haar in als gemiddelde leerling. Hij zegt: "*Ze heeft een redelijk wiskundig inzicht, maar ze doet niet veel voor wiskunde*." Maaike heeft een negatief advies gekregen voor wiskunde A. Ze legt dat uit met de woorden: "*Ik ben ongelofelijk slecht in economie. Wiskunde A is economisch en daar ben ik slecht in*." Ook docent B, de wiskundedocent in vwo 5 en 6, deelt haar in als gemiddelde leerling: "*Ze heeft wel inzicht, maar haar inzet is wisselend, maar in principe doet ze haar werk*."
Maaike beaamt in interview 1 dat ze weinig huiswerk maakt: "*Ik zit ongeveer één keer in de week aan huiswerk, of minder, en op school werk ik ook niet zoveel*." In de interviews 3 en 4 zegt ze dat haar studiehouding voor het vak wiskunde is veranderd. Ze merkt bijvoorbeeld op dat ze voor wiskunde haar huiswerk maakt: "*Ik probeer mijn werk goed bij te houden, maar doe dat alleen voor wiskunde*." Maaike maakt duidelijk dat docent B hier een rol in speelt. Ze zegt in interview 2: "*Meneer B gaat heel snel, hij legt iets uit en kijkt alle huiswerkopdrachten heel snel na; je moet thuis wel aan de slag, je hebt geen tijd in de les om iets te begrijpen*."

Maaike is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B1 op het schoolexamen een 6,3 en op het centraal schriftelijk examen een 8,3.

6.7.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

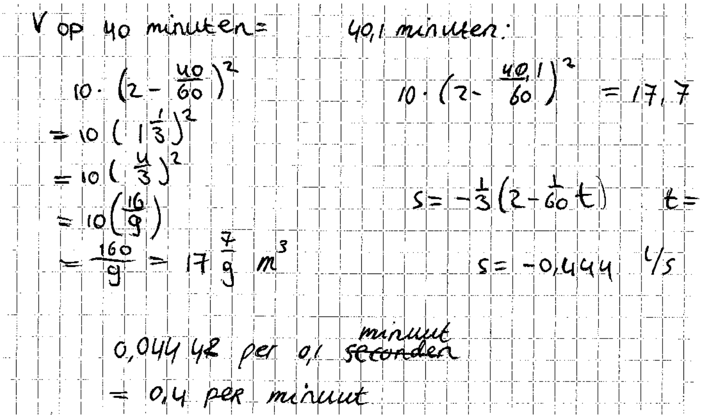
In tabel 6.7.1 wordt een samenvatting gegeven van Maaikes werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.7.1 Maaikes werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Maaike vult $t = 40$ in de formule in en komt al hoofdrekenend met breuken via de berekening $10(2 - \frac{1}{60} \cdot 40)^2 = 10\ (1\frac{1}{3})^2$ op $V = \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9}$. Ze deelt deze waarde door 40 en komt zo op 0,44 liter/minuut. Over deze waarde zegt ze: “*Eerst heb ik t = 40 ingevuld, dan heb je het aantal liter per veertig minuten denk ik,* […] *en dat dan weer gedeeld door 40 zodat je het per één minuut hebt.*” Ze deelt dus het aanwezige volume door de verstreken tijd. Ze twijfelt omdat “*het wel heel weinig is*”, en controleert de berekening met de rekenmachine. Ze merkt nog op dat het kubieke meters zijn, maar vindt het verschil tussen de antwoorden van onderdeel a en b nog steeds groot.
Interview 2, november 2006 Maaike begint met: “*Dat doe ik weer net als de vorige som met 40,01*.” Ze berekent $V(40)$ en $V(40{,}01)$ en schrijft op: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}044}{0{,}01}$ (in de teller heeft ze op de rekenmachine 0,0044 afgelezen als 0,044, GR). Ze schrijft erachter 4,44 l/m. Ze gebruikt dus het differentiequotiënt op een klein interval. Als de interviewer vraagt het antwoord te controleren zegt ze dat ze bij natuurkunde formules voor snelheid heeft gehad, maar dat ze die nu niet meer weet. Ze noemt daarna nog: “*dat je in plaats van 0,1 ook een s kunt gebruiken, gewoon als stap, en dat je die later herleidt tot 0; maar daar ben ik niet zo goed in*.” Hiermee refereert ze aan het limietproces. Ze beredeneert dat de waarde 4,44 “*wel een beetje veel is, dan zou de tank in tien minuten leeg zijn, maar het duurt 100 minuten*”. Het antwoord 0,444 lijkt Maaike beter; ze denkt dat ze iets fout heeft gedaan met de nullen. Kortom, ze gebruikt de klein-intervalmethode en noemt daarnaast het limietproces.
Interview 3, mei 2007 Maaike berekent $V(40)$. Ze zegt op basis van de grafiek dat het ongeveer 17,5 lijkt. Ze deelt de berekende waarde door 40, dus 17,8 / 40 =0,445 m^3/min. Ze zegt hierover: “*Ik had ook kunnen aflezen uit de grafiek en delen door 40*.” Ze zegt vervolgens: “*Ik kan geen andere manier verzinnen*”, maar ze denkt dat het klopt, want het lijkt op het antwoord van onderdeel a. Ze deelt dus, net als in interview 1, het aanwezige volume op $t = 40$ door de verstreken tijd.
Interview 4, november 2007 Maaike berekent $V(40)$ zonder rekenmachine en komt op $17\frac{7}{9}$. Ze merkt op dat dit het volume is maar dat ze de snelheid moet vinden. Eerst zegt ze: “*Die natuurkunde- formules waren ook al weer twee jaar geleden, en ze staan ook niet meer in mijn rekenmachine*”, vervolgens vraagt ze zich af of ze kan differentiëren: “*Het is niet zo dat als je die differentieert dat daar de snelheid uitkomt*?” Ze gaat hier niet op door maar schakelt over naar een volgende procedure: “*Ik weet misschien wel iets denk ik. Als je er nou één minuutje naast gaat zitten of één seconde. Een klein stapje ernaast maar dat is niet precies*.” Deze laatste procedure werkt ze verder uit (zie figuur 6.7.1). Als ze later in hetzelfde interview met de opdracht *Watertanks-c* bezig is, geeft ze aan dat

ze had kunnen differentiëren. Ze voert dit alsnog uit (zie figuur 6.7.1, rechtsonder) maar twijfelt of de afgeleide goed is, omdat er nu een negatieve waarde uitkomt voor de snelheid.
Kortom, eerst twijfelt ze over de procedure symbolisch differentiëren, vervolgens berekent ze een antwoord met de klein-intervalmethode. Uiteindelijk gaat ze alsnog symbolisch differentiëren maar ze twijfelt nog steeds over deze procedure.

Uit tabel 6.7.1 blijkt dat Maaike in interview 1 en een jaar later in interview 3 dezelfde niet-adequate procedure gebruikt, die gebaseerd is op een deling van de aanwezige hoeveelheid op t = 40 door de verstreken tijd. Ze maakt in deze beide interviews geen opmerkingen waaruit blijkt dat ze beseft dat haar antwoord gebaseerd is op een interval, terwijl in de opdracht gevraagd wordt naar een momentane verandering.



Figuur 6.7.1 Berekening van Maaike bij de opdracht *Watertanks-b* (I-4, nov 2007)

De interviews 2 en 4 lijken qua procedures en uitspraken ook op elkaar. Ze gebruikt beide keren de klein-intervalmethode; ze merkt op dat het om de snelheid gaat en dat ze daarbij passende natuurkundeformules is vergeten. In geen van de interviews werkt ze grafisch door bijvoorbeeld een koorde, een raaklijn of grafische informatie te gebruiken. Symbolisch differentiëren noemt ze voor het eerst in interview 4, waarbij ze zich afvraagt of je daarmee de snelheid kunt vinden. Pas later in interview 4, als ze met het onderdeel *Watertanks-c* bezig is, realiseert ze zich dat ze bij onderdeel b ook had kunnen differentiëren. Ze voert dat vervolgens correct uit. Echter, als het antwoord verschilt van de numerieke procedure, dan wijt ze dit aan een mogelijke fout bij het differentiëren en niet aan de numerieke procedure.

Tabel 6.7.2 Maaikes werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006
Maaike herkent de benzineformule direct als een formule die één van haar wiskundeleraren heeft genoemd. Ze zegt: "*Die h is een stapje, waarmee je de gemiddelde snelheid op een bepaald punt berekent.*" Deze uitspraak legt ze gedetailleerder uit met een voorbeeld:

"*Dan neem je bijvoorbeeld 200, daar doe je dan een denkbeeldige stap bij en dan reken je het uit net als ik deed met 0,1* (in de opdracht *Watertanks-b*, GR). *En dan neem je in plaats van 0,01 een h als stap. Als je dat alles hebt uitgerekend dan blijft die h nog in de formule staan. Die herleid je dan tot nul*." Ze interpreteert dit vervolgens: "*Als je bij een bepaald punt de h herleidt tot nul, krijg je hoeveel liter verbruikt is* [...] *het liter-verbruik op die afstand*." Ze spreekt naar aanleiding van de formule in globale termen over het limietproces en interpreteert dit als de verbruikte hoeveelheid benzine.
Interview 3, mei 2007 Maaike herkent de formule en legt uit: "*De h is een stapje. Die formule is om uit te rekenen hoe snel het benzineverbruik is op een bepaald punt, door een heel klein stapje ernaast te gaan zitten*." Ze relateert deze uitspraak aan de grafiek: "*Als je bijvoorbeeld een punt op de lijn hebt, kun je het preciezer uitrekenen*." Haar uitspraak betreft een punt maar ze refereert niet aan een koorde of een raaklijn. Om het verder te verduidelijken legt ze uit: "*We hadden eerst een andere manier geleerd; dat je een punt op de lijn pakt en dan 0,01 of zo er naast uitrekent, maar dit* (de formule, GR) *was preciezer*." De interviewer vraagt of het iets uitmaakt of je voor *h* de waarde 0,01, 10 of 100 neemt. Ze merkt op dat het niet veel uitmaakt want "*je deelt het toch weer door zichzelf* [...]; *als je in de formule 100 deelt door 100 is dat hetzelfde als 1 gedeeld door 1*". De uitspraken gaan over het in de les behandelde limietproces. Uit de uitspraken blijkt dat ze de notatie niet goed interpreteert.
Interview 4, november 2007 Maaike geeft aan dat ze deze opdracht tijdens het vorige interview ook niet wist, maar dat ze dit ooit met wiskunde gedaan heeft "*maar toen noemden we h s*". Na enige tijd nadenken zegt ze: "*Ik weet niet wat het betekent. Het lijkt wel of er altijd 1 uit komt. Als je dit min elkaar doet, dan komt er h uit. En h gedeeld door h is 1*." Maaike probeert nu waarden in te vullen, maar geeft aan dat ze niet weet wat er berekend wordt. Ze zegt: "*misschien het verbruik bij een aantal kilometer dat niet gemeten is, bijvoorbeeld dat je de waarde bij 15 kunt uitrekenen, op basis van de waarden bij 10 en 20*." Net als in de vorige interviews geeft ze aan dat ze de formule herkent van de wiskundeles, maar lukt het niet de formule te interpreteren in de situatie.

In tabel 6.7.2 wordt Maaikes werkwijze bij de opdracht *Benzine* weergegeven. In alle interviews herkent Maaike de benzineformule als een formule die ze bij wiskunde heeft gehad. In de interviews 2 en 3 verwoordt ze het limietproces, namelijk dat je *h* kleiner kunt maken, 0,1 of 0,01 of *h* kan laten staan en op nul herleiden. Dit limietproces kan ze onder woorden brengen al gebruikt ze het woord 'limiet' niet. Ze geeft vervolgens niet aan waartoe het proces dient. In de interviews 3 en 4 doet ze ook uitspraken waaruit blijkt dat ze de notatie van de formule niet goed interpreteert. Ze noemt dat de *h* door zichzelf gedeeld wordt, wat één oplevert.
De herkenning van de formule resulteert bij Maaike vooral in uitspraken die gerelateerd zijn aan het limietproces.

6.7.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.7.3 is weergegeven welke procedures Maaike in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.7.3 Door Maaike gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1										
I-2		◉◉				◉	◉◉		◉	
I-3	●			○			◉		●◉	
I-4	◉	●○	○				●●●●◉		○	

●: accuraat uitgevoerd; ◉: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure.
Maaike kiest in de interviews achtereenvolgens nul, zes, vijf en tien maal een adequate procedure. In de interviews 2 en 3 gebruikt ze vooral (klein-)-intervalmethoden, natuurkundeformules en symbolisch differentiëren maar ze voert deze procedures meestal niet accuraat uit. Uit tabel 6.7.1 blijkt dat ze bij de opdracht *Watertanks-b* in interview 4 voor het eerst overweegt om met behulp van symbolisch differentiëren de momentane uitstroomsnelheid te berekenen. Vanaf dat moment in interview 4 gebruikt ze het symbolisch differentiëren wel in alle daaropvolgende berekenopdrachten. Grafische procedures gebruikt ze in de interviews nauwelijks.
Bij opdrachten gerelateerd aan natuurkunde gebruikt ze natuurkunde-formules, maar ze weet deze meestal niet goed toe te passen. Ze gebruikt of noemt in enkele interviews bijvoorbeeld een formule voor de gemiddelde snelheid, namelijk $v_{gem} = \frac{v_1+v_2}{2}$. In interview 3 zegt ze bij de opdracht *Tikkerband-a*: "*Ik weet eigenlijk niet meer hoe dat moest. Gemiddelde snelheid, daar hebben we wel een formule voor geleerd, v één plus v twee delen door 2, maar dan zou je een rechte lijn moeten hebben, niet met zo'n kromming erin*." Ze plaatst zelf een kanttekening bij het gebruik van deze formule voor de gemiddelde snelheid. In de interviews 2 en 4 gebruikt ze de formule $h = \frac{1}{2}gt^2$, maar in beide interviews vult Maaike de formule niet goed in.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire
Maaike gebruikt in interview 2 vier procedures. In interview 3 gaat ze achteruit, zowel in breedte van repertoire als in het aantal adequaat gekozen procedures. In interview 4 komen vijf procedures voor in haar werk, maar ook nu is het aantal accuraat uitgevoerde procedures bij de verschillende procedures beperkt. Het symbolisch differentiëren wordt de centrale procedure. Ze voert deze ook steeds accuraat uit.
Uit bijlage D blijkt dat het Maaike vaak niet lukt meerdere procedures bij één opdracht te noemen. Als ze de opdracht op één manier heeft opgelost, noemt ze geen alternatieve procedures. Ze controleert haar antwoorden soms door

globaal in te schatten of haar antwoord past in de situatie. In interview 4 noemt ze bij de opdracht *Kogel* wel meerdere procedures, hoewel ze maar één daarvan uitvoert.

Indicator 1.3 De samenhang van het repertoire

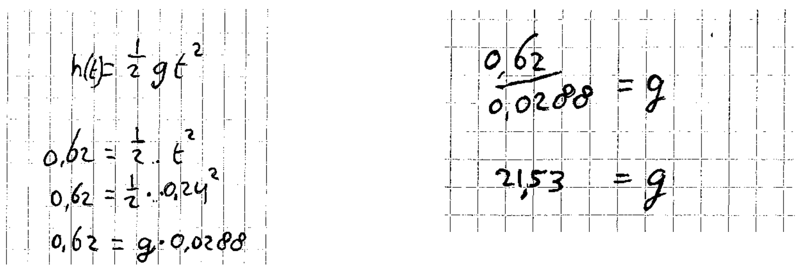
Uit bijlage D blijkt dat Maaike zelden meerdere procedures naast elkaar gebruikt. Als dit wel gebeurt, relateert ze de procedures in de eerste drie interviews niet aan elkaar.

In interview 4 legt ze voor het eerst een relatie tussen symbolisch differentiëren en de klein-intervalmethode bij de opdracht *Watertanks-b*. Ze vraagt zich namelijk af of ze de momentane uitstroomsnelheid kan berekenen door te differentiëren. Ze stapt eerst van die gedachte af en berekent de uitstroomsnelheid met de klein-intervalmethode. Als ze met het volgende onderdeel *Watertanks-c* bezig is, concludeert ze : "*Ja waar de helling hetzelfde is, lijkt mij, dan moet je wel differentiëren*." En even later: "*Dus had ik het wel moeten differentiëren bij onderdeel b*." Nu ze de relatie tussen het symbolisch differentiëren en de klein-intervalmethode gelegd heeft, zegt ze ook bij de volgende opdracht dat ze deze zowel met differentiëren als met "*een stapje, net als zonet, had kunnen doen*".

Maaike legt geen andere relaties tussen procedures. Ze gebruikt nauwelijks grafische procedures om de opdrachten op te lossen. In interview 3 noemt ze bij twee natuurkundeopdrachten wel de mogelijkheid om een raaklijn te gebruiken, maar ze weet niet hoe ze deze methode moet uitvoeren. Natuurkundeformules, die ze wel vaker gebruikt, functioneren geïsoleerd van andere procedures. Dat wordt hieronder met twee voorbeelden toegelicht.

In interview 2 gebruikt Maaike de natuurkundeformule $h = \frac{1}{2}gt^2$. Ze vult in deze formule voor h = 0,62 en voor t = 0,24 in en berekent daarmee een waarde voor g (zie figuur 6.7.2). Ze zegt hierover: "*Ik ben de valversnelling aan het uitrekenen maar ik weet nog niet helemaal wat ik daar aan heb, maar dat is deze formule die me te binnen schiet*."

In interview 4 spreekt ze weer over deze natuurkundeformule, maar ook nu kan ze de formule niet goed toepassen of relateren aan andere procedures: "*De hoogte is ½ at², dan moet je weer weten hoe zwaar die kogel was. Of gt², valversnelling, maar al die informatie die heb je nou niet*."



Figuur 6.7.2 Maaike berekent de valversnelling in de opdracht *Kogel* (I-2, nov 2007)

Uit bovenstaande voorbeelden uit de interviews 2 en 4 blijkt dat Maaike probeert door het invullen van bekende gegevens de ontbrekende gegevens te berekenen.

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire

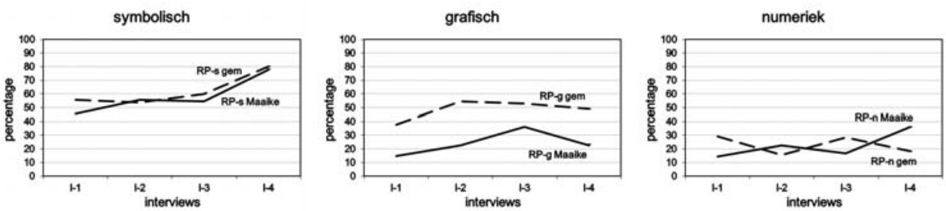
In de eerste drie interviews lost Maaike maar weinig opdrachten goed op. Haar repertoire in de eerste drie interviews is smal en ze relateert in deze interviews geen procedures aan elkaar. In interview 4 is enige ontwikkeling zichtbaar ten opzichte van de eerdere interviews als ze ontdekt dat de helling van een grafiek berekend kan worden met symbolisch differentiëren als alternatief voor de klein-intervalmethode. Meerdere berekenopdrachten lost ze dan op met behulp van differentiëren. Haar repertoire wordt iets breder en ze benoemt de samenhang tussen symbolisch differentiëren en de klein-intervalmethode. Ze gebruikt nauwelijks grafische procedures, en natuurkundeformules functioneren geïsoleerd van andere procedures.

6.7.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

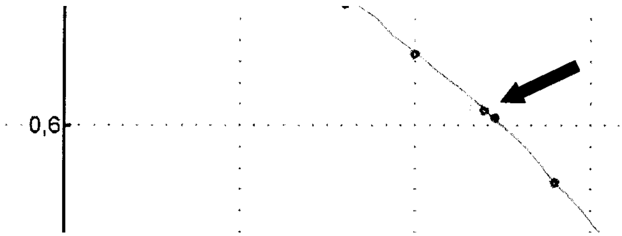
In figuur 6.7.3 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Maaike afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.

Maaike is vooral gericht op de symbolische representatie; in bijna elke opdracht begint ze met de gegeven formule te rekenen. Ze start bijvoorbeeld bij het maken van de opdracht *Watertanks-b* in elk interview met een berekening van het aanwezige volume. De voorkeur voor de symbolische representatie is ook zichtbaar in de opdracht *Watertanks-c*. In de interviews 1 en 2 begint ze bij deze opdracht direct een vergelijking op te lossen nadat ze in plaats van de afgeleide functies de gegeven formules heeft gelijkgesteld. Ook in de opdracht *Benzine* spreekt ze in elk interview over de symbolische berekening van het limietproces.



Figuur 6.7.3 Verloop van de representatiepercentages van Maaike

De numerieke representatie komt bij een aantal opdrachten naar voren, vooral omdat Maaike de interval- of de klein-intervalmethode gebruikt. Ze refereert slechts sporadisch aan de grafische representatie. In interview 4 ondersteunt ze haar berekening één keer grafisch om te controleren of de symbolisch berekende valsnelheid klopt. (zie figuur 6.7.4).



Figuur 6.7.4 Maaike geeft in interview 4 aan dat de valsnelheid in de opdracht *Kogel* gecontroleerd kan worden door de afname op een klein-interval te berekenen

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide
In alle interviews noemt Maaike in haar redeneringen weinig aspecten (zie tabel 6.7.4). De drie aspecten in interview 2 noemt ze alle bij dezelfde opdracht, namelijk *Monopolie-b*. Ze plot daar de grafiek van de totale kosten en zegt: "*Daar is hij* [kijkt naar rekenmachine] *hier is hij het laagst, ik zit me te bedenken wat is ook maar weer precies dat differentiëren, wat doe je dan eigenlijk? Even denken hoor het was de helling, hellingfunctie dus de toename*."
Maaike probeert op verschillende manieren de betekenis van de afgeleide of het differentiëren onder woorden te brengen. Voorbeelden die dit illustreren zijn:

- Bij de opdracht *Remweg-b* zegt Maaike in interview 2: "*Dat accent betekent dat het gedifferentieerd is, maar wat dat is? Misschien de tijd waarin hij afremt, misschien de afremversnelling, of vertraging*."
- Bij dezelfde opdracht in interview 4: "*Dit zal wel weer de afgeleide van één of andere formule zijn, de versnelling? Nee, de kortst mogelijke of langst mogelijke remweg is 1,15. Meestal kan je met afgeleiden extremen bepalen*."

Deze laatste interpretatie was ook in interview 3 al naar voren gekomen toen Maaike TK′(20) interpreteerde als "*de maximale of de minimale kosten*".

Tabel 6.7.4 Het aantal door Maaike genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	1						
I-2		1			1		1 (hellingfunctie)
I-3	1			1			
I-4		3		1	1		

Bij de opdracht *Benzine* (tabel 6.7.2) spreekt Maaike niet expliciet over het concept afgeleide maar noemt ze wel het limietproces. Ze legt in interview 2 uit dat ze bij wiskunde geleerd heeft hoe je in een differentiequotiënt de waarde 0,1 kan vervangen door een *s* die je vervolgens tot 0 herleidt (zie figuur 5.4).
In interview 4 noemt ze nog steeds weinig aspecten. In twee opdrachten geeft ze aan dat je met differentiëren de helling vindt; ook noemt ze dat je met differentiëren de snelheid vindt.

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Maaike kiest na het lezen van een opdracht vaak de symbolische representatie, maar gaat pas in interview 4 bij meerdere opdrachten gebruik maken van differentiëren om een momentane verandering te berekenen. In de interviews 2 en 4 gebruikt ze soms de numerieke representatie, terwijl de grafische representatie en grafische procedures nauwelijks voorkomen in haar oplossingen en redeneringen. Ook noemt ze een beperkt aantal aspecten. In interview 4 lijkt zich dit verder te ontwikkelen. Maaike gaat in meerdere opdrachten de afgeleide gebruiken, waarbij ze verwoordt dat je met de afgeleide de helling of de snelheid kunt berekenen.

6.7.5 De ontwikkeling van Maaikes wiskundige bekwaamheid

In de interviews 1, 2 en 3 heeft Maaike een smal, weinig samenhangend repertoire en lost ze weinig opdrachten goed op. Daarnaast relateert ze weinig aspecten aan elkaar. Hoewel Maaike zich het limietproces tijdens de interviews 2 en 3 herinnert, kan ze het niet goed uitleggen; ze brengt het vooral procedureel, symbolisch onder woorden. In interview 4 blijkt dat ze een stap in haar ontwikkeling heeft gemaakt, omdat ze herkent dat meerdere opdrachten met behulp van symbolisch differentiëren opgelost kunnen worden. Deze herkenning ontstaat nadat ze heeft opgemerkt dat door middel van differentiëren de helling gevonden kan worden en nadat ze een momentane verandering heeft berekend met zowel de klein-intervalmethode als met symbolisch differentiëren. De relatie tussen het aspect helling en differentiëren gebruikt ze ook in volgende opdrachten van ditzelfde interview.
In alle interviews probeert Maaike natuurkunde-opdrachten op te lossen door natuurkundeformules te gebruiken. Ze legt echter geen verbindingen tussen deze formules en procedures die ze in de wiskundeles geleerd heeft.
Maaikes werk kenmerkt zich doordat de grafische representatie een marginale rol speelt. Daarnaast valt op dat ze in de eerste drie interviews nauwelijks opdrachten goed oplost, terwijl ze in interview 4 vrijwel alle opdrachten oplost met symbolisch differentiëren.
Ontwikkeling van haar wiskundige bekwaamheid wordt vooral zichtbaar in interview 4, maar ook in dit laatste interview is breedte en samenhang van repertoire en het gebruik van representaties en aspecten beperkt.

6.8 De ontwikkeling van Nico

6.8.1 Achtergrond van de leerling

Nico is een leerling die het profiel Natuur en Techniek gekozen heeft met twee keuzevakken, namelijk economie en aardrijkskunde. Volgens wiskundedocent A van vwo 4 is hij een goede leerling: "*Hij is een ontzettend slimme vent; in de klas blijkt dat uit verrassende vragen en opmerkingen; hij heeft de meeste creatieve ideeën in de klas en het zijn bijna altijd goede ideeën*." Aan de andere kant meldt deze docent over hem: "*De structuur in zijn werk ontbreekt; hij maakt weinig huiswerk en werkt erg slordig; hij noteert berekeningen slecht*."
Wiskundedocent B van vwo 5 en 6 taxeert hem als een zwakke leerling omdat Nico weinig doet voor school. Daardoor is het voor de docent lastig Nico's niveau in te schatten. Docent B zegt: "*Iemand die relatief weinig doet kan zoveel talent hebben, maar dat weet ik niet bij hem*."
Nico beaamt zelf de opmerkingen over studiehouding en netheid van werken wanneer hij in interview 4 zegt: "*Ik mis op proefwerken heel veel punten omdat ik niet goed opschrijf en ik oefen niet genoeg*." Bij wiskundeproefwerken verliest hij vooral veel punten op standaardvragen. Nico zegt hierover: "*Ik ben niet iemand die alle sommen maakt; ik maak zo'n proefwerk met logisch redeneren en alles wat ik weet.*"
Hij is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B12 op het schoolexamen een 4,5 en op het centraal schriftelijk examen een 5,3.

6.8.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.8.1 wordt een samenvatting gegeven van Nico's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

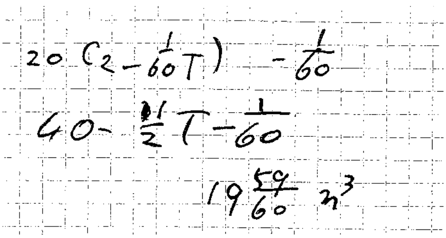
Tabel 6.8.1 Nico's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Nico expliciteert welke methode hij voor deze opdracht wil gebruiken: "*Even uitrekenen hoeveel vierkante meter er nog in zit op 40 minuten, dan weet je hoeveel water eruit is, en dan heb je 40 minuten en dan dat gedeelte delen door de 40*." Deze werkwijze, gebaseerd op een gemiddelde uitstroomsnelheid, werkt hij uit. Hij berekent de uitgestroomde hoeveelheid maar trekt waarden met verschillende eenheden van elkaar af namelijk 40 000 (liter) – 17,8(kubieke meter). Hij deelt de uitkomst 39982,2 door 40 minuten en komt op 999,5 liter per minuut. Nico sluit af met de opmerking dat hij denkt dat hij "*een fout heeft gemaakt, omdat er rare getallen uitkomen*".
Interview 2, november 2006 Nico zegt: "*Dit is hetzelfde principe van vraag één, omdat daar ook gevraagd werd naar de snelheid op een bepaald punt*." Hij verwoordt hiermee dat in twee verschillende opdrachten hetzelfde aspect, namelijk 'snelheid', gevraagd wordt. Hij berekent met behulp van symbolisch differentiëren de afgeleide waarde in een punt maar zonder de kettingregel toe te passen; hij komt daardoor op $26\frac{2}{3}$. Over dit antwoord zegt hij: "*Dit zou dan weer de richtingscoëfficiënt moeten zijn*." Als de interviewer vraagt zijn antwoord te controleren zegt hij dat dit een te hoog getal is. Zijn uitleg daarbij is: "*Als je hier één opzij*

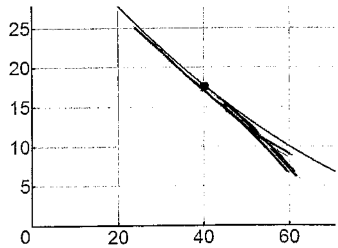
gaat, [wijst dit aan in de grafiek] *gaat hij echt niet in één klap 26 naar beneden, dus daar klopt niks van.*" De momentane verandering (laag 3), berekend met de afgeleide, relateert hij dus met een grafisch, discreet aspect (laag 2) van de afname per éénheid. Hij controleert zijn antwoord nu nog grafisch met de raaklijnmethode. Hij constateert dat er bij het differentiëren een rekenfout is gemaakt.
Interview 3, mei 2007 Nico herhaalt de vraag: "*Met welke snelheid in liters per minuut stroomt de tank leeg*?" Hij vervolgt met "*pakken we de afgeleide*". Tijdens het berekenen en herschrijven van de afgeleide maakt hij twee fouten (figuur 6.8.1). Hij vindt het antwoord 19 59/60 m^3dat hij interpreteert als een uitstroom van 19000 liter per minuut. Hij constateert: "*Daar klopt niets van, ik kijk even hoe steil die lijn loopt op dat moment.*" Hij controleert zijn antwoord via de raaklijnmethode. De uitkomst 0,4375 leest hij uit het rekenscherm van de rekenmachine af als "*rond de 50, rond de 45 liter per minuut"* (in plaats van rond de 450 liter per minuut, GR). Omdat hij ervan uit gaat dat de afgeleide niet klopt berekent hij deze opnieuw door de functie uit te schrijven als tweedegraads polynoom. Door opnieuw een rekenfout in de berekening komt hij uit op de waarde –0,556. Nico leest dit uit zijn rekenscherm eerst af als min vijfenvijftig, maar daarna als 556 liter per minuut. Hij controleert dit antwoord door de afname per minuut om te rekenen naar de afname over 120 minuten en constateert dat hij "*zijn antwoord wel goed vindt*". Hij gebruikt dus symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode op basis van de aspecten snelheid en steilheid. Hij controleert zijn antwoord door de afname per eenheid om te rekenen naar een afname over het gehele interval.
Interview 4, november 2007 Nico begint met de opmerking dat de snelheid hier de afgeleide is. Hij berekent de afgeleide maar vindt door een rekenfout –8/9 (in plaats van –4/9). Hij schrijft op '–8/9 liter per minuut'. Hij doet een grafische controle door een lijntje langs de grafiek te tekenen (zie figuur 6.8.2). Hij beredeneert, uitgaande van zijn berekende antwoord, dat elke minuut –8/9 wegstroomt, dus "*dan zou hij hier 20 keer –8/9 liter, dus dat is min 18 of zo naar beneden gaan*". Deze grafisch-numeriek redenering is gebaseerd op een lineaire voortzetting van de afname per minuut. Hij stelt dan vast dat de afname in de grafiek ongeveer 10 is en niet 18. Nico controleert zijn antwoord door de grafiek van het volume te plotten en vindt met de rekenmachine-optie dy/dx de waarde –0,444 (hij zegt –44, GR). Hij constateert dat dit precies de helft is van –8/9 en is overtuigd dat dit antwoord goed is. In de berekening van de afgeleide heeft hij naar zijn zeggen "*ergens een factor twee fout zitten*". Hij gebruikt drie procedures en redeneert zowel symbolisch, grafisch en numeriek in termen van de afname per minuut.

Uit tabel 6.8.1 blijkt dat Nico in interview 1 de gemiddelde uitstroomsnelheid berekent, dus laag 2 in het afgeleideschema. Zijn antwoord is onjuist omdat hij in de berekening getallen met verschillende eenheden van elkaar aftrekt. Vanaf interview 2 begint hij deze opdracht steeds met het berekenen van de afgeleide waarde op tijdstip t = 40. Doordat Nico in elk interview fouten maakt in de berekening van de afgeleide komt hij steeds op een onjuiste uitstroomsnelheid (zie bijvoorbeeld figuur 6.8.1).

Om zijn antwoorden in de interviews 2, 3 en 4 te controleren gebruikt Nico in de interviews 2 en 4 een strategie die hij ook bij andere opdrachten toepast. Hij interpreteert de symbolisch berekende momentane uitstroomsnelheid discreet-grafisch als toename of afname per eenheid bij lineaire voortzetting van de grafiek. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 6.8.2. Zijn berekende antwoord, –8/9 per minuut, zou volgens hem per 20 minuten een afname van ongeveer 18 opleveren. In de grafiek blijkt echter de afname tussen t = 40 en t = 60 ongeveer 10 te zijn.



Figuur 6.8.1 Berekening van Nico bij de opdracht *Watertanks-b* (I-3)



Figuur 6.8.2 Controlemethode bij de opdracht *Watertanks-b* (I-4, nov 2007)

Naast deze controlemethode gebruikt hij in de interviews 2 en 3 de raaklijnmethode om zijn antwoord te controleren en in interview 4 de rekenmachine-optie dy/dx. Bij het gebruik van deze methoden maakt hij rekenfouten met eenheden (hij zegt bijvoorbeeld -8/9 liter in plaats van kubieke meter) of leest hij decimale getallen af als gehele getallen.

Tabel 6.8.2 Nico's werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Nico leest de vraag en zegt: "*Dus hoe steiler de lijn loopt, hoe groter zijn verbruik per kilometer is.*" Dit is een correcte interpretatie van de getekende grafiek, maar nog niet van de formule. Hij interpreteert de notatie $V(a + h)$ als vermenigvuldiging, dus als $Va + Vh$. Hij zegt dan ook: "*Als je alle haakjes zou wegwerken komt er gewoon V uit, dat is gewoon het verbruik.*" Hij merkt op dat hij geen idee heeft wat die h is. Als de interviewer vraagt naar de betekenis van de formule in deze situatie zegt hij: "*Het gemiddelde verbruik van de auto; waarom zouden je iets anders gaan uitrekenen?*" Hij verbindt deze uitspraak niet met de gegeven formule.
Interview 3, mei 2007 Nico interpreteert de notatie $V(a)$ eerst weer als V maal a. Als hij bedenkt dat $V(a)$ betekent het verbruik na a kilometer, interpreteert hij de formule opnieuw maar nu als $(V(a) + V(h) – V(a))/h$. Hij schrijft uiteindelijk op: $V(h)/h$ en daarachter 'V bij 1 eenheid h gemiddeld'. De uitleg die hij hierbij geeft is: "*Je hebt hier het verbruik na een a aantal kilometer. Dus als je v(a) deelt door a heb je het aantal kilometer gedeeld door het aantal kilometer is 1. Je hebt dus het verbruik na 1 km.*" Deze uitspraak komt neer op het wegdelen van de h zodat V(1) overblijft. Nu neemt hij een getallenvoorbeeld: bij 100 km is het verbruik 10 liter. De waarde 10/100 dus 0,1 liter per kilometer is het gemiddelde verbruik aldus Nico. Als de interviewer vraagt of het uitmaakt of je voor h tien of honderd kiest, beredeneert hij dat het niet uitmaakt; want h/h is weer één.
Interview 4, november 2007 Nico zegt dat hij zich herinnert dat de notatie $V(a + h)$ niet V maal $(a + h)$ betekent. Ook zegt hij dat hij hier "*vast een theorie over heeft gehad*", maar hij noemt niet welke. Hij berekent op basis van waarden uit de tabel 39,7 / 500 en 1,3 /10 (dat is dus $V(500)/500$ en $V(10)/10$, GR) en zegt dat er geen constant verbruik is. Hij constateert dan ook: "*anders zou de grafiek recht zijn*". Hij blijft de formule interpreteren als "*het verbruik van*

> *h gedeeld door h zelf*".
> Nico zegt vervolgens dat het gaat om een traject: "*Dus een meerafstand h die je aflegt en dat gedeeld door h, dus h is dan het verbruik per km h. Dus de formule betekent wat je verbruik is van km h op een bepaalde km* [wijst enkele punten op de grafiek aan] *op dat traject zeg maar. Ongeveer denk ik.*" De zin die hij uiteindelijk opschrijft is: 'het verbruik per kilometer tijdens afstand *h*'.

In tabel 6.8.2 wordt Nico's werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Hij zoekt naar betekenissen van de benzineformule maar doet in geen enkel interview uitspraken waarin hij de formule in relatie brengt met het concept afgeleide. Zijn interpretatie wordt in interview 2 gehinderd doordat hij $V(a + h)$ interpreteert als $Va + Vh$. In de interviews 3 en 4 interpreteert hij de benzineformule als $V(h)/h$. Hij noemt deze laatste breuk in interview 3 het gemiddeld verbruik en in interview 4 'het verbruik per kilometer tijdens afstand *h*'. Deze interpretaties benaderen de betekenis, met dien verstande dat de invloed van de *a* geheel buiten beschouwing wordt gelaten. In beide interviews komen echter ook andere uitspraken voor die onjuist of minder nauwkeurig zijn, zoals "*met V(a) gedeeld door a* […] *heb je dus het verbruik na 1 km*" en "*de formule betekent wat je verbruik is van km h op een bepaalde km*."
In de drie interviews doet hij uitspraken die binnen de situatie goed passen, waarbij hij de grafiek ook betrekt in zijn uitspraken, bijvoorbeeld *"hoe steiler de lijn loopt hoe groter zijn verbruik per kilometer is"*, maar het lukt hem niet de verbinding met de formulenotatie onder woorden te brengen.

6.8.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.8.3 is weergegeven welke procedures Nico in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.8.3 Door Nico gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●●○		○							
I-2	⭘			●●			●●⭘⭘○		○	
I-3	●⭘	○	●	●⭘			⭘○		○○	
I-4	●		○	○○	●	●	●●⭘⭘⭘		○	

●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1. Het kiezen van een adequate procedure.
Nico noemt of gebruikt in de opeenvolgende interviews respectievelijk vier, negen, tien en twaalf maal een adequate procedure. Het aantal procedures neemt elk interview toe; van interview 2 naar interview 4 neemt het aantal

adequaat gekozen procedures met drie toe. Hoewel de centrale procedure bij de berekenopdrachten het symbolisch differentiëren wordt, combineert hij dit met andere procedures om antwoorden te controleren.
Natuurkundeformules zijn slechts beperkt onderdeel van zijn repertoire, want in alle interviews noemt hij wel natuurkundeformules maar hij weet niet hoe hij ze toe moet passen. In interview 3 gebruikt hij bijvoorbeeld bij de opdracht *Tikkerband-b* de formule $F = m \cdot a$, maar na enige tijd zegt hij: "*Omdat het al wat langer geleden is ben ik die formules vergeten*." Economieformules betreffende marginale grootheden past Nico in geen enkel interview toe, terwijl hij wel het vak economie volgt.

Indicator 1.2. De breedte van het repertoire
In interview 1 past Nico twee procedures toe. De breedte van het repertoire neemt vervolgens toe via vier procedures in interview 2 tot uiteindelijk zeven procedures in interview 4. De in interview 2 gekozen procedures gebruikt hij in interview 4 weer, maar vult hij aan met bijvoorbeeld een rekenmachine-optie en het plotten en interpreteren van de grafiek van de afgeleide functie. Procedures zoals de raaklijnmethode en het berekenen van de helling van een koorde noemt Nico wel in interview 4 maar hij voert deze niet uit.
Als het gaat om het gebruik van meerdere procedures bij dezelfde opdracht is er ook ontwikkeling van interview 2 naar interview 4 (bijlage D). In interview 2 kiest hij in bijna alle opdrachten symbolisch differentiëren, uitgezonderd de opdracht *Kogel* waar hij in totaal vier verschillende procedures noemt of gebruikt. In interview 4 noemt hij bij opdrachten, naast differentiëren, vaak nog een tweede of derde alternatieve methode. Dat hij meerdere procedures toepast heeft vaak te maken met rekenfouten in de antwoorden. Die brengen hem er toe met andere procedures de opdracht opnieuw op te lossen. Voorbeelden hiervan zijn in elk interview zichtbaar bij de opdracht *Watertanks-b* (tabel 6.8.1).

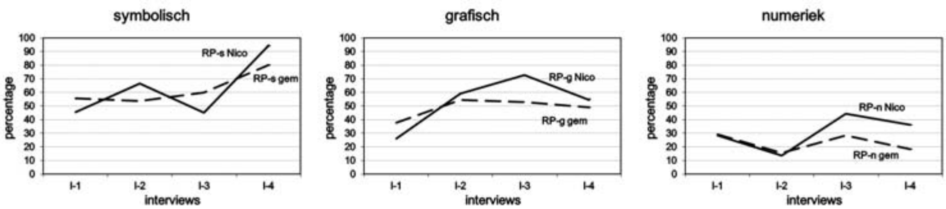
Indicator 1.3. De samenhang van het repertoire
De raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren relateert Nico vanaf interview 2 aan elkaar. Hij legt de relatie in een uitspraak bij de opdracht *Kogel*, waarin hij de richtingscoëfficiënt van de raaklijn verbindt aan de afgeleide: "*Het is de hoogte en de tijd dus dan is de richtingscoëfficiënt de snelheid; dus dan ga ik de afgeleide bepalen*."
Hij berekent in deze opdracht eerst de hele vergelijking van de raaklijn, maar zegt aan het eind "*dat dit niet had gehoeven, want als je de richtingscoëfficiënt hebt, kun je het al gelijk zien*". In de volgende interviews blijft hij de relatie tussen deze twee procedures verwoorden.
De raaklijn wordt in alle interviews, maar vooral in interview 4, gezien als lineaire voortzetting vanaf het raakpunt. De richtingscoëfficiënt is dan de waarde waarmee de raaklijn per stap omhoog of naar beneden gaat.

Voorbeelden hiervan zijn te zien bij de opdrachten *Watertanks-b* (zie tabel 6.8.1, I-4) en *Kogel*. Bij de opdracht *Kogel* in interview 4 merkt hij bijvoorbeeld op: "*Dat is hoeveel meter hij op dit moment naar beneden gaat als er één t voorbij zou gaan. Dus dat lijkt mij weer de afgeleide van deze formule.* […] *Dit zijn de meters en dit zijn de seconden, dus de m/sec is hier de afgeleide van; hoeveel hij hier per 1 seconde aan meters naar beneden gaat.*" Hij berekent nu de afgeleide met een rekenfout. Hij schrijft op -8,9t en vult t = 0,62 (de waarde 0,62 is de h-coördinaat van het gegeven punt in plaats van de tijd t, GR).
Bij de opdracht *Kogel* in interview 4 wordt ook duidelijk dat natuurkundeformules voor hem geïsoleerd van andere procedures functioneren in het afgeleideschema (figuur 3.2). Hij zegt namelijk dat hij in de formule voor de hoogte van de *Kogel* herkent dat de 0,9 de beginhoogte is. Over het tweede deel van de formule merkt hij op: "*Ja, een half, wat was dat ook al weer? Ik zou denken ½mv². Nee, een half* […] *ik weet het echt niet meer*." Hij herinnert zich dat er een formule was die bij deze situatie past maar weet niet meer welke.

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
Nico gaat vanaf interview 2 als centrale procedures het symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode gebruiken en hij relateert deze twee procedures aan elkaar. Hij interpreteert de raaklijn vaak als lineaire voortzetting, waarbij de richtingscoëfficiënt de toe- of afname per eenheid weergeeft. Doordat hij veel rekenfouten maakt is hij genoodzaakt meerdere procedures toe te passen. In interview 4 gebruikt hij naast de twee genoemde methoden ook de rekenmachine-optie dy/dx en het plotten en interpreteren van de grafiek van de afgeleide. Nico noemt wel natuurkundeformules maar hij is in geen van de interviews zeker welke formule hij gebruiken kan en hij relateert het gebruik van deze formules niet aan andere procedures.

6.8.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties
In onderstaande figuren is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Nico afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen weergegeven.



Figuur 6.8.3 Verloop van de representatiepercentages van Nico

In interview 1 start Nico bij de meeste opdrachten met het gebruik van de symbolische representatie. Bij de opdracht *Watertanks-b* berekent hij eerst met de formule de waarde bij $t = 40$ (zie tabel 6.8.1). De opdracht *Tikkerband-b* wil hij ook symbolisch oplossen: "*De snelheid van het autootje na 0,8, dan moet je eerst een formule opstellen voor de snelheid van het autootje*." Omdat symbolische procedures Nico niet bekend zijn tijdens interview 1 schakelt hij over op grafische of numerieke procedures.
Vanaf interview 2 gebruikt hij in de verschillende opdrachten een variatie aan representaties, symbolisch, grafisch en numeriek. Dit is bijvoorbeeld bij de opdracht *Watertanks-b* in tabel 6.8.1 zichtbaar. Hij vindt in interview 2 een antwoord middels symbolisch differentiëren, welke hij controleert met een grafisch-numerieke redenering ("*als je één opzij gaat, gaat hij echt niet met één klap 26 naar beneden*") en vervolgens grafisch checkt met de raaklijnmethode. Ook bij de opdracht *Remweg-b* zoekt hij naar betekenis van $R'(80) = 1{,}15$ in de grafische of numerieke representatie. Hij ziet 1,15 als toename en tekent een raaklijn aan een grafiek om te onderzoeken wat de notatie betekent.
In interview 4 geeft Nico in veel opdrachten de voorkeur aan de symbolische representatie, maar om zijn antwoorden te controleren maakt hij veel berekeningen en houdt hij veel redeneringen aan de hand van de grafische of numerieke representatie. Hierdoor zijn alle representatiespercentages in interview 4 bovengemiddeld.

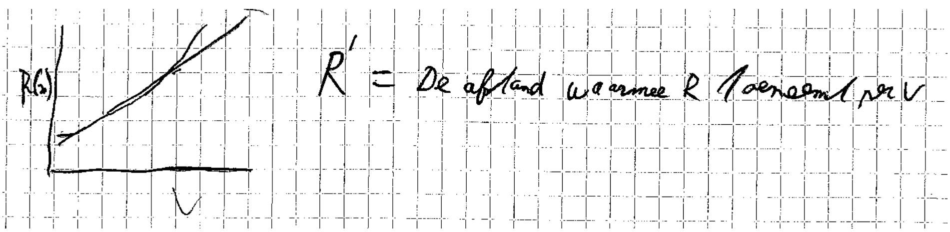
Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide
In tabel 6.8.4 is weergegeven welke aspecten van het concept afgeleide door Nico genoemd worden in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.8.4 Het aantal door Nico genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1							
I-2	1	1	4	2	1		
I-3	1	1	2	1	1	1	
I-4	1			1	4		

In interview 1 redeneert Nico alleen in termen van de in de opdracht beschreven situaties. In interview 2 redeneert hij over diverse aspecten van het concept afgeleide, waarbij grafische aspecten de voorkeur hebben. Hij verbindt in interview 2 vaak de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Dat is bijvoorbeeld zichtbaar in tabel 6.8.1 bij de opdracht *Watertanks-b*, maar ook bij de opdracht *Kogel* in interview 2 waar hij zegt: "*Het is de hoogte en de tijd dus dan is de richtingscoëfficiënt de snelheid; dus dan gaan we de afgeleide bepalen*." Doordat hij bij verschillende opdrachten dezelfde aspecten herkent, kiest hij ook bij meerdere opdrachten in de interviews 2, 3 en 4 voor dezelfde procedure om de opdracht op te lossen.

Ook bij het interpreteren van $R'(80) = 1{,}15$ (opdracht *Remweg-b*) verduidelijkt hij in interview 2 de situatie door een grafiek te schetsen en een raaklijn te tekenen. Het lukt hem echter niet tot een goede interpretatie te komen. In interview 4 komt hij wel tot een goede interpretatie omdat hij na het tekenen van de raaklijn een grafisch-numerieke benadering kiest (zie figuur 6.8.4). Hij zegt: *"Voor iedere kilometer dat hij bij 80 harder zou rijden, neemt de remweg toe met 1,15 meter op dat moment* [...] *voor elke kilometer per uur dat er bij komt hoeveel meer meter je remweg wordt; dat zou op dit moment 1,15 zijn"* (I-4, nov 2007). In interview 4 gebruikt Nico deze grafisch-numerieke redenering (toename van y als x één toeneemt) vaak, terwijl hij afgeleide waarden in interview 4 niet meer interpreteert met het woord richtingscoëfficiënt. Op deze manier weet hij ook de notatie $R''(v) > 0$ (*Remweg-c*) te interpreteren, omdat hij R'' beschrijft als 'de hoeveelheid waarmee R/V toeneemt', en vervolgens opschrijft: 'hoe harder de auto rijdt, hoe meer de remweg toeneemt per kilometer per uur' (I-4, nov 2007). Hiermee is hij de enige leerling in dit onderzoek die een juiste interpretatie geeft bij de opdracht *Remweg-c*.



Figuur 6.8.4 ***Remweg-b*** **(I-4, nov 2007)**

Er vindt een verschuiving plaats in de door hem genoemde aspecten. In interview 2 noemt hij vooral grafische aspecten als 'steilheid' en 'richtingscoëfficiënt', terwijl hij in interview 4 bij veel opdrachten het aspect 'toename per eenheid' noemt.

Ook in de economie-opdracht interpreteert Nico de afgeleide van bijvoorbeeld de totale kosten als "*hoeveel de kosten meer worden als er één product bijkomt*". Hoewel hij het vak economie heeft, spreekt hij niet over het begrip 'marginale kosten'.

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide

In Nico's handelen en uitspraken blijkt dat hij vanaf interview 2 gebruik maakt van verschillende representaties. In interview 4 gebruikt hij de symbolische representatie het meest, maar switcht hij makkelijk naar een andere representatie als hij met een berekening of redenering vastloopt of als hij zijn antwoord wil controleren. Vanaf interview 2 noemt hij in zijn redeneringen verschillende aspecten van het concept afgeleide. In interview 2 interpreteert hij de afgeleide waarde vooral grafisch als ‘richtingscoëfficiënt’ en soms grafisch-numeriek als ‘toename per eenheid’. In interview 4 komt de interpretatie van de ‘toename per eenheid’ vaker voor, terwijl Nico niet meer spreekt over ‘richtingscoëfficiënt’ van de raaklijn.

6.8.5 De ontwikkeling van Nico’s wiskundige bekwaamheid

Van interview 1 naar interview 2 verschuift Nico’s repertoire van een numerieke procedure naar symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode. In interview 2 gebruikt Nico vaak de symbolische en de grafische representatie. Hij noemt in dit interview ook vooral grafische aspecten zoals ‘richtingscoëfficiënt’ en ‘steilheid’. In interview 4 beschikt hij uiteindelijk over een breed repertoire van zeven procedures die hij noemt of gebruikt. Hij heeft een voorkeur voor de symbolische representatie, maar switcht makkelijk naar de grafische of numerieke representatie om antwoorden de controleren. Er is een verschuiving zichtbaar in de aspecten die hij benoemt en gebruikt in zijn redeneringen. Van vooral grafische aspecten in interview 2 en 3 naar ‘toename per eenheid’ waarmee hij de afgeleide in bijna alle opdrachten in interview 4 interpreteert. Het redeneren in termen van ‘toename per eenheid’ maakt dat Nico als enige de opdracht *Remweg-c* goed interpreteert. De samenhang tussen de bij wiskunde geleerde procedures verbetert, maar relaties met procedures geleerd bij natuurkunde of economie zijn niet zichtbaar in zijn uitspraken en handelingen. Natuurkundeformules past hij in geen van de interviews goed toe.

Nico’s werk kenmerkt zich doordat in de uitwerkingen in alle interviews veel slordigheden en rekenfouten voor komen. Hierdoor is hij regelmatig genoodzaakt oplossingen op een andere manier te controleren of verbeteren. Dit maakt dat hij veel schakelt tussen verschillende procedures en representaties, en veel aspecten noemt en met elkaar verbindt.

Bij Nico is ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid vooral zichtbaar in een uitbreiding van repertoire en toenemende flexibiliteit in het gebruik van procedures, representaties en aspecten van het concept afgeleide. Doordat hij moeite heeft met het accuraat uitvoeren van de diverse procedures vindt hij bij meerdere opdrachten niet het correcte antwoord.

6.9 De ontwikkeling van Otto

6.9.1 Achtergrond van de leerling

Otto is een leerling die het profiel Natuur en Techniek gekozen heeft met het keuzevak biologie. Wiskundedocent A beoordeelt Otto in vwo 4 als gemiddelde tot goede leerling. Over Otto's wiskundige inzicht meldt de docent: "*Heel vaak als ik een proefwerk bekijk, valt het me tegen. Vaak een groot verhaal, maar soms doet hij het helemaal fout. Hij heeft van nature geen intuïtieve strategieën. Soms gaat hij door met een methode, terwijl het helemaal niet goed is*." Otto's eigen inschatting over zijn wiskundig inzicht sluit hierbij aan, zoals hij in interview 1 verwoordt: "*Het moet mij wel een keer zijn uitgelegd, voordat ik het zelf kan doen*." En ook: "*Ik vind het lastig om een som zeg maar uit te pakken en om de bestaande som die je hebt geoefend er uit te halen*."
Otto is naar het oordeel van docent A zeer gemotiveerd. Docent B, Otto's wiskundedocent in vwo 5 en 6, komt tot eenzelfde taxatie, wanneer hij zegt: "*Otto is een harde werker, maar heeft niet veel inzicht*." Otto beaamt in verschillende interviews dat hij hard werkt aan schoolwerk. Dat blijkt uit uitspraken zoals in interview 1: "*Ik doe meestal wel goed mijn huiswerk*" en in interview 4: "*Ik doe veel voor school*." Bovendien heeft Otto tijdens dit gehele onderzoek wiskundebijles gehad van verschillende mensen.
Otto is geslaagd met voor wiskunde-B12 op het schoolexamen een 5,5 en op het centraal schriftelijk examen een 6,4.

6.9.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.9.1 wordt een samenvatting gegeven van Otto's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.9.1 Otto's werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

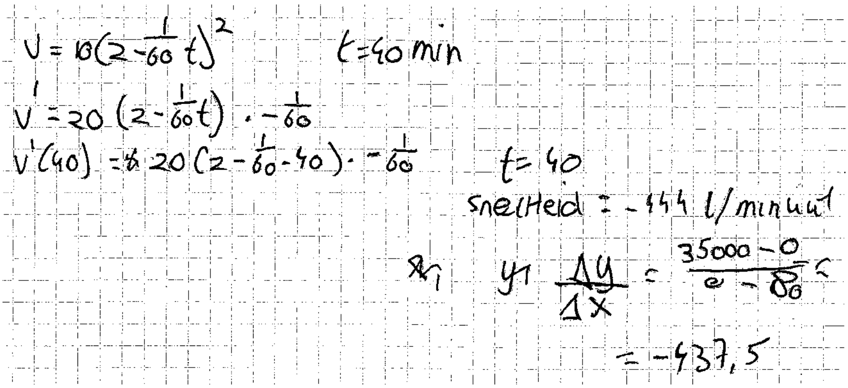
Interview 1, april 2006 Otto berekent de waarde $V(40)$ en schrijft als antwoord op 17,7778. Volgens hem komt dat overeen met de grafiek. Als controlemethode noemt hij het oplossen van de vergelijking $17{,}7778 = 10(2 - \frac{1}{60}t)^2$, waar $t = 40$ uit zou komen. Hij interpreteert dus het volume als de uitstroomsnelheid.
Interview 2, november 2006 Otto voert de formule voor het volume in de grafische rekenmachine in. Hij kiest een rekenmachine-optie waarmee de raaklijn geplot wordt en de formule van de raaklijn wordt berekend. Hij interpreteert deze formule niet. Over deze werkwijze verklaart hij: "*Het gaat weer om dat ik de snelheid moet uitrekenen op dat punt; volgens mij moet je gaan differentiëren. De formule van de raaklijn kreeg je met differentiëren*." In deze uitspraak relateert hij twee procedures maar deze relatie wordt door hem niet duidelijk verwoord. Hij zegt namelijk dat hij 'de formule van de raaklijn' krijgt wanneer hij differentieert. Hij differentieert de formule voor V (met een rekenfout, en zonder kettingregel, GR) en berekent de uitstroomsnelheid -493 1/3 liter per minuut. Om het antwoord te controleren zegt hij dat hij daarvoor "*wil uitrekenen hoe hoog de punten zijn, en die punten*

optellen en delen door 2". Hij noemt en gebruikt dus laag 3- en 4-procedures (raaklijn en differentiëren), maar voert ze niet accuraat uit.
Interview 3, mei 2007 Otto berekent de afgeleide en zegt daarover: "*De formule gebruik je dacht ik om een raaklijn op te stellen; de raaklijn staat gelijk, als je die dan bij punt 40 zou doen;* [...] *of de snelheid, de snelheid ergens van, dat was volgens mij de afgeleide, dat dacht ik*." Hij berekent nu $V'(40) = -0{,}444$ maar zegt dat "*dit niet is wat ik zocht*". Hij gaat nu over op de raaklijnmethode en berekent de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Hij schrijft op $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{35000-0}{0-80} = -437{,}5$ (zie figuur 6.9.1) en benoemt dat het eerdere antwoord –0,444 "*wel logisch is*". Hij vergelijkt dit antwoord met het antwoord van onderdeel a en concludeert dat het "*wel goed zal zijn*". Deze conclusie onderbouwt hij met een redenering over het globale gedrag van de grafiek omdat deze grafiek volgens Otto "*eerst steiler is en dan afvlakt*". Op de vraag naar alternatieve methoden antwoordt hij: "*Ik vroeg me eerst af of het met de dubbele afgeleide moest, maar het is volgens mij de enkele afgeleide omdat het de snelheid is*." Hij berekent dus eerst het antwoord met symbolisch differentiëren. Omdat dit antwoord volgens hem niet klopt gebruikt hij de raaklijnmethode. Na vergelijking van beide antwoorden zegt Otto dat differentiëren ook een goede methode is.
Interview 4, november 2007 Otto berekent de afgeleide, door de formule als tweedegraads polynoom te schrijven en vervolgens te differentiëren. Door rekenfouten vindt hij als antwoord –555 liter/minuut. Als de interviewer vraagt naar alternatieve methoden tekent Otto de raaklijn. De berekening $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{350}{80}$ levert de uitstroomsnelheid 437,5 waar Otto over zegt: "*Het is een beetje onnauwkeurig, maar ik denk dat het wel zou kunnen*." Aangezien de beide procedures een verschillend antwoord opleveren, vraagt de interviewer of het verschil door onnauwkeurigheid komt. Otto laat de rekenmachine de raaklijn berekenen [in het scherm staat y = –0,444..x+35,56..]. Als conclusie schrijft Otto op dat er 444 liter per minuut uitstroomt. Otto zoekt vervolgens naar rekenfouten in de afgeleide. Otto gebruikt drie procedures. Uit zijn werkwijze blijkt dat volgens hem het symbolisch differentiëren, de rekenmachine-optie 'tangent' en de raaklijnmethode hetzelfde antwoord opleveren.

Uit tabel 6.9.1 blijkt dat Otto in interview 1 in plaats van $V'(40)$ de functiewaarde $V(40)$ berekent en ervan uitgaat dat dit de gevraagde uitstroomsnelheid is. Vanaf interview 2 komt in zijn werkwijze steeds de afgeleide en de raaklijn voor en in de interviews 2 en 3 relateert Otto deze procedures ook aan het aspect 'snelheid'.

De raaklijnmethode en het berekenen van de afgeleide op $t = 40$ komen in elk van de interviews 2, 3 en 4 voor (zie figuur 6.9.1) en hij relateert de procedures in de opeenvolgende interviews beter aan elkaar.

In de interviews 2 en 4 laat hij de raaklijn berekenen met een optie van de grafische rekenmachine. In interview 2 kan hij echter niet uitleggen hoe hij de lineaire formule in het scherm moet interpreteren. In interview 4 kan hij de richtingscoëfficiënt identificeren als de uitstroomsnelheid en controleert hij zijn antwoord door de raaklijn met de hand te tekenen. In interview 4 combineert Otto drie adequaat gekozen procedures, namelijk de raaklijnmethode, het symbolisch differentiëren en de grafische rekenmachine-optie ‘tangent’.



Figuur 6.9.1. Uitwerking Otto van de opdracht *Watertanks-b* (I-3)

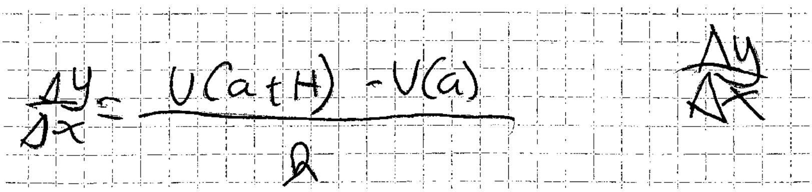
Tabel 6.9.2 Otto’s werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Otto zegt: “*Dan ga je op een heel klein stukje uitrekenen wat de richtingscoëfficiënt is, dan kan je daar mee uitrekenen wat hij heeft verbruikt op dat punt. Dit is zeg maar een nauwkeurige manier.*” Ter illustratie gebruikt Otto een getallenvoorbeeld: “*Je zou 1,000001 −1 kunnen berekenen en dan delen door 0,000001. Dan weet je het dus op dat bepaalde punt. Het benaderen van de raaklijn. Als je dat uitrekent dan weet je tussen dat ene stukje* [wijst naar de grafiek] *en een heel klein stukje dat het daar* is.” Deze uitspraken verwijzen naar het limietproces, maar zijn niet duidelijk geformuleerd. Over de relatie tussen de formule en de raaklijn zegt hij nog twee dingen namelijk dat *“dit de algebraïsche wijze is om dat te doen”* en dat *“je dit gebruikt bij differentiëren om de formule voor de raaklijn te bepalen*”. Otto koppelt de benzineformule aan richtingcoëfficiënt en raaklijn. Hij vertaalt de formule binnen de situatie naar ‘het verbruik op dat punt’. Aan deze interpretatie voegt hij even later nog toe: “*Hierbij zou je dan kunnen uitrekenen wat op een bepaald punt van die lijn het verbruik is. Hoeveel liters hij per kilometer verbruikt.*” De laatste uitspraak (liters per km) is meer adequaat binnen de situatie dan de eerste (het verbruik op een punt).
Interview 3,mei 2007 Na het lezen van de opdracht doet Otto een aantal uitspraken gerelateerd aan de benzineformule, waarbij hij veel zinnen begint, maar ze niet afmaakt. Omdat deze manier van spreken kenmerkend is voor Otto volgt hier het letterlijke citaat van de eerste uitspraak: “*Nou dat V a plus een stapje, min V a* [wijst naar de formule] *dat is volgens mij preciezer uit te rekenen, eh, wat de snelheid op een bepaald* [stopt]. *Dat is precies, dat is met delta* ,[schrijft op het blaadje $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, (zie figuur 6.9.2)] *dat had je met al die andere dingen ook kunnen gebruiken, dat is delta y delen door delta x* [wijst naar de delta y en delta x] *en als je dat tussen twee waarden doet* [wijst globaal naar twee punten op de grafiek] *dan is het nauwkeurig, maar zou je dan, eh, of een heel klein getal maken* [wijst naar de formule] *, of een letter, dan kun je de snelheid of hier het aantal, het verbruik op een bepaald aantal kilometer exact uitrekenen.*” De interviewer vraagt wat de invloed van de *h* is. Otto zegt: “*Je kunt bijvoorbeeld 300 en 300,0001 doen om het exact uit te rekenen, als je h = 100 kiest dan weet je het gemiddelde*

tussen 300 en 400, je kunt ook h laten staan, dan komt er een exact getal uit."
Otto verbindt de benzineformule dus met de notatie van een differentiequotiënt, met het limietproces, met eerdere opdrachten en met de betekenis in de situatie. Hij kan niet nauwkeurig onder woorden brengen wat de formule betekent.

Interview 4, november 2007
Otto zoekt naar woorden, en uitdrukkingen. Hij zegt bijvoorbeeld: "*Zo bepaal je het verbruik, of ga je naar een verbruik. Hoe noem je dat? De richting.*"
Otto legt dit verder uit met een uitspraak waarin hij het limietproces noemt in de grafische representatie: "*Een bepaalde richtingscoëfficiënt, dat kun je dan doen door een hele kleine stapjesgrootte. Of je doet het met h, en dan kun je het exact uitrekenen* [maakt een gebaar met zijn potlood over de grafiek]. *Dan bereken je eigenlijk de richtingscoëfficiënt op een punt en dat zou dan het verbruik moeten zijn*."
Als de interviewer vraagt naar de invloed van de *h* zegt Otto: "*Dan wordt het onnauwkeuriger, omdat je het over een veel groter traject neemt; of dan neem je eerder het gemiddelde verbruik, maar als je het juist op een bepaald punt wilt weten, dan moet je juist de stapgrootte zo klein mogelijk maken*."
Hiermee interpreteert Otto de formule voor grotere waarden van *h* als gemiddeld verbruik, dus op laag 2. Voor kleine stapgrootte spreekt Otto steeds over 'het verbruik' in plaats van 'het gemiddelde verbruik op een korte afstand'. Uiteindelijk schrijft Otto op 'een formule waarmee je het verbruik over een bepaalde periode berekent.'

In tabel 6.9.2 wordt Otto's werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Otto relateert allerlei aspecten van het concept afgeleide aan de formule. Hij schrijft tijdens interview 3 bijvoorbeeld voor de benzineformule de notatie $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (zie figuur 6.9.2) en spreekt over het limietproces. Hij legt uit dat als je voor *h* een kleine stapgrootte neemt je 'nauwkeurig', 'precies' of 'exact' de richtingscoëfficiënt of het verbruik (I-2 en I-4) of de snelheid (I-3) kunt berekenen. Als Otto spreekt over grotere waarden van *h* maakt hij duidelijk dat het om een gemiddeld verbruik gaat. Voor kleine waarden spreekt hij soms van 'het verbruik', soms van 'het gemiddelde verbruik' of 'liter per kilometer' en soms van 'de richtingscoëfficiënt', maar hij kan dit niet nauwkeurig onder woorden brengen.



Figuur 6.9.2 Aantekening van Otto bij de opdracht *Benzine* (I-3, mei 2007)

6.9.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.9.3 is weergegeven welke procedures Otto in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt. Op basis van deze tabel wordt aan de hand van de drie indicatoren (tabel 3.2) breedte en samenhang van Otto's repertoire beschreven.

Tabel 6.9.3 Door Otto gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differen-tiëren laag 4	Aflezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	⭘		○						○	
I-2				○○○	⭘⭘		⭘⭘⭘			
I-3	⭘		●	●●			●		⭘⭘	
I-4				●○	●		●●⭘○		⭘○	

●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1 Het kiezen van een adequate procedure

Otto kiest in de opeenvolgende interviews achtereenvolgens drie, acht, zeven en negen maal een adequate procedure. In de interviews 1 en 2 weet hij echter geen enkele opdracht goed op te lossen. Bij twee opdrachten in interview 2 noemt hij dezelfde drie procedures, namelijk de raaklijnmethode, symbolisch differentiëren en de rekenmachine-optie ‘tangent’ (zie bijlage D), maar hij weet geen van de drie procedures accuraat uit te voeren. Otto kiest bij de opdracht *Watertanks-b* in interview 4 weer dezelfde drie procedures. Deze keer lukt het hem beter de procedures accuraat uit te voeren. Naast de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren, de twee procedures die hij in de interviews 2, 3 en 4 bijna bij elke opdracht gebruikt, noemt Otto in meerdere interviews ook natuurkundeformules.

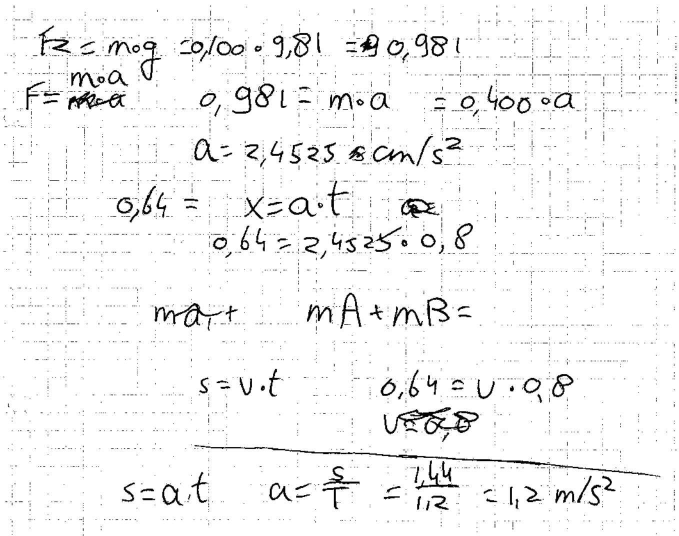
In de interviews 2 en 4 kiest hij ongeveer hetzelfde aantal maal een adequate procedure, maar in interview 4 is er verbetering in de accuratesse waarmee procedures worden uitgevoerd. Het is opmerkelijk dat hij in interview 4 bij de opdrachten *Watertanks-c* en *Monopolie-b* geen adequate procedures kiest maar de twee formules aan elkaar gelijk stelt en de vergelijking oplost.

Indicator 1.2 De breedte van het repertoire

Otto’s repertoire neemt in de interviews 1, 2 en 3 steeds toe, maar in interview 4 gebruikt hij weer minder verschillende procedures. Hij gebruikt weinig laag 2- en laag 3-procedures, maar bij veel opdrachten past hij een combinatie van de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren toe. Soms gebruikt hij een rekenmachine-optie of natuurkundeformules. Hij weet echter in de meeste gevallen niet zeker welke natuurkundeformule bruikbaar is en het lukt hem niet deze formules accuraat toe te passen. Dit wordt hieronder toegelicht met twee voorbeelden.

In de opdracht *Tikkerband-c* in interview 1 zoekt Otto naar een formule. Hij zegt: “*Ja, die hele versnelling dat is toch v maal s, ik dacht uit het natuurkunde boek of zo. Of v maal s in het kwadraat; het had iets met de snelheid te maken*.”

De opdracht *Tikkerband-b* lost hij bijna correct op door gebruik te maken van de verschillende krachten die op het systeem werken. Maar nadat hij de versnelling van het gehele systeem (bijna correct) berekend heeft, gebruikt hij een niet-correcte formule, namelijk $s = a \cdot t$ (zie figuur 6.9.3).



Figuur 6.9.3 Opdracht *Tikkerband-b* (I-3)

Otto ontwikkelt zich bij opdrachten waar een momentane verandering berekend moet worden. Hij past bij deze opdrachten meerdere procedures toe en gaat deze ook accurater uitvoeren (zie bijlage D).

Indicator 1.3 De samenhang van het repertoire

In interview 2 noemt Otto dat hij de afgeleide kan gebruiken, de raaklijnmethode kan toepassen of de optie ‘tangent’ van de rekenmachine. Hij is echter over alle methoden onzeker. Wanneer hij bijvoorbeeld de rekenmachine de raaklijn laat berekenen weet hij niet hoe hij uit de formule van de raaklijn de (uitstroom)snelheid kan aflezen (zie tabel 6.9.1). Een probleem hierbij in interview 2 is dat Otto wel zegt dat “*je met differentiëren de formule voor de raaklijn hebt*”, maar niet weet dat de momentane verandering is af te lezen als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Dat hij zegt dat je met differentiëren ‘de formule van de raaklijn’ krijgt, lijkt te berusten op een verkeerd beeld van de relatie tussen afgeleide en raaklijn. Het lukt hem in interview 2 niet de drie genoemde methoden aan elkaar te relateren.

In interview 3 en nog meer in interview 4 relateert hij de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren goed aan elkaar (zie tabel 6.9.1 en figuur 6.9.1). Dat blijkt wanneer in interview 4 de raaklijnmethode en de rekenmachine-optie ‘tangent’ een ander antwoord opleveren dan het symbolisch differentiëren. Hij is er op dat moment zeker van dat hij een fout in de afgeleide heeft gemaakt.

De natuurkundeformules die Otto noemt staan in het spreken en handelen steeds los van andere procedures. Binnen dezelfde opdracht noemt hij bijvoorbeeld dat hij een raaklijn kan gebruiken of een natuurkundeformule, maar hij expliciteert geen verband tussen beide procedures. Dit blijft in alle interviews zo. Om dit te illustreren wordt Otto's werkwijze bij de opdracht *Kogel* in interview 4 beschreven. Hij gebruikt de formule $v = \frac{\Delta x}{t}$ omdat "*je de snelheid kunt berekenen met de afgelegde afstand in een bepaalde tijd*". Hij vraagt zich ook nog af of de kogel wel recht naar beneden valt, anders moet je namelijk ook met de horizontale beweging rekening houden. Hij berekent vervolgens de gemiddelde snelheid op interval [0; 0,24]. (Dit doet hij wel correct, maar in deze opdracht wordt gevraagd naar de snelheid op één tijdstip, GR). Als de interviewer vraagt zijn antwoord te controleren berekent Otto $h'(0{,}24)$. Tijdens deze berekening ziet Otto dat het getal 9,8 voorkomt in de afgeleide. Het berekende antwoord lijkt Otto wel goed, omdat 9,8 precies de valversnelling is. Ook zegt Otto dat hij een raaklijn zou kunnen tekenen en ten slotte merkt hij op dat er een manier was met kinetische energie en zwaarte-energie. Maar die procedure kun je volgens hem niet gebruiken omdat je de massa niet weet. Otto noemt dus meerdere procedures, zowel vanuit wiskunde (afgeleide, raaklijn) als natuurkunde (formule voor gemiddelde snelheid, gebruik van energie), maar relateert de natuurkundeformules niet aan andere procedures.

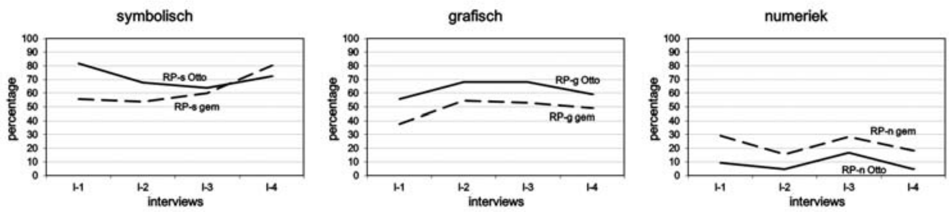
Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire

Otto beschikt in de interviews 1 en 2 over een smal en onsamenhangend repertoire. Hij lost in deze twee interviews geen enkele opdracht goed op. De door hem genoemde procedures zijn adequaat, maar hij weet niet hoe hij de procedures moet gebruiken. In de interviews 3 en 4 relateert hij symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode steeds meer aan elkaar en combineert hij deze twee procedures met een derde, namelijk een optie van de rekenmachine. Natuurkundeformules functioneren in alle interviews geïsoleerd van bij wiskunde behandelde procedures. Tot en met interview 4 komt het voor dat hij opeens een niet-adequate procedure kiest. Otto's uiteindelijke repertoire in interview 4 is smal, want hij gebruikt of noemt vier procedures, maar wel samenhangend, want hij noemt relaties tussen procedures.

6.9.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Indicator 2.1 Het gebruik van representaties

In figuur 6.9.4 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Otto afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.

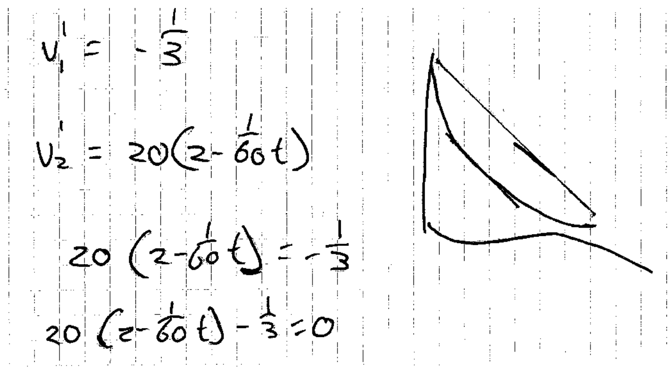


Figuur 6.9.4 Verloop van de representatiepercentages van Otto

In alle interviews gebruikt Otto met name de symbolische en de grafische representatie en verbindt hij deze representaties meerdere keren. Hieronder volgen drie voorbeelden:

Otto wil in interview 1 bij de opdracht *Monopolie-b* berekenen wanneer de kosten en de opbrengsten even snel toenemen. Hij stelt de formules van TO en TK gelijk maar zegt dan: *'gelijk, dat is niet even snel toenemen*'. Vervolgens kijkt hij globaal in de grafiek naar de plaats waar de grafieken evenwijdig lopen. Hiermee schakelt hij over van de symbolische naar de grafische representatie.

In interview 2 gebruikt hij bij de opdracht *Watertanks-c* zowel de afgeleide, als een schets waarin hij de 'raaklijnen' aangeeft (zie figuur 6.9.5). Hij merkt op dat bij evenwijdigheid "*de formule voor de raaklijn gelijk moet zijn*", maar nadat hij de afgeleiden heeft gelijk gesteld weet hij niet hoe hij dit verder kan oplossen. De numerieke representatie gebruikt Otto nauwelijks.



Figuur 6.9.5 Uitwerking van de opdracht Leegpompen of leeglopen-c (I-2, nov 2006)

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

In interview 1 gebruikt Otto twee keer het aspect 'steilheid' wanneer hij redeneert over grafieken (zie tabel 6.9.4). Vanaf interview 2 gebruikt hij vaak de aspecten 'snelheid' en 'richtingscoëfficiënt' bij de verschillende opdrachten. In interview 2 komt het aspect 'richtingscoëfficiënt' vooral voor bij de redeneeropdrachten zoals *Benzine* (tabel 6.9.2) en *Remweg*. Bij de opdracht *Remweg* merkt hij op: "*Als je gaat differentiëren krijg je de formule van de raaklijn, weet je de richtingscoëfficiënt.*"

Tabel 6.9.4 Het aantal door Otto genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	2						
I-2	1		3	2			1 differentiaal
I-3	1		1	3		3	
I-4			6	1	1	1	

In interview 3 komt het aspect 'snelheid' vaker voor in zijn redeneringen. Hij zegt: "*De snelheid ergens van, dat was met de afgeleide*." Een nieuw aspect in interview 3 is 'delta *y* gedeeld door delta *x*'. In interview 3 gebruikt hij dit aspect in drie opdrachten: bij het interpreteren van de benzineformule (zie figuur 6.9.2), bij de opdracht *Watertanks-b* (zie figuur 6.9.1) en bij het berekenen van de gemiddelde snelheid in de opdracht *Tikkerband-a*. Bij elk van deze opdrachten gaat het om andere grootheden, maar Otto noteert steeds $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en berekent het verticale verschil gedeeld door het horizontale verschil.
In interview 4 is 'richtingscoëfficiënt' weer het meest gebruikte aspect. Bij zes opdrachten legt Otto relaties tussen de aspecten 'richtingscoëfficiënt' en de procedure symbolisch differentiëren. In interview 4 spreekt hij nauwelijks meer over het aspect 'snelheid'. Wel vertelt hij aan de hand van de opdracht *Remweg-b* dat in de wiskundeles wel eens gewezen is op het verband tussen afgelegde weg, snelheid en versnelling, want hij legt uit: "*Ik weet niet of dat alleen zo geldt met formules waarbij je kijkt naar een bepaalde afstand die wordt afgelegd of zoiets dergelijks. De eerste* (afgeleide, GR) *was dan de snelheid* [schrijft op x en x' en daaronder x''] *en de tweede* (afgeleide, GR) *was dan de afgelegde afstand. Mijn wiskundeleraar B heeft het ooit wel eens allemaal opgeschreven wat het allemaal was, met dat differentiëren*." (zie hoofdstuk 5, figuur 5.5)

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Otto gebruikt vanaf interview 2 een combinatie van de grafische en symbolische representatie, maar de numerieke representatie gebruikt hij zelden. Hij gebruikt in zijn spreken een variatie aan aspecten zoals 'richtingscoëfficiënt' (vooral in de interviews 2 en 4), 'snelheid' (in de interviews 2 en 3) en 'het delen van delta *y* door delta *x*'(vooral in interview 3). Otto relateert aspecten steeds beter aan elkaar.

6.9.5 De ontwikkeling van Otto's wiskundige bekwaamheid

In Otto's handelen en spreken met betrekking tot het concept afgeleide speelt de raaklijn, al dan niet met behulp van een optie op de grafische rekenmachine, een grote rol. Vanaf interview 2 noemt hij in elk interview bij bepaalde opdrachten zowel het symbolisch differentiëren als de raaklijn. In interview 2 is voor hem het verband tussen de raaklijn en de afgeleide in één punt niet duidelijk. Dit verband kan hij in interview 3 en meer nog in interview 4 wel goed benoemen. In interview 4 noemt hij bijvoorbeeld vaak de relatie tussen het aspect 'richtingscoëfficiënt' en de procedure 'symbolisch differentiëren'. Vanaf interview 2 gebruikt Otto de symbolische en grafische representatie naast elkaar.

Otto gebruikt geen breed repertoire maar bepaalde procedures die hij gebruikt relateert hij steeds beter aan elkaar. Dit geldt echter niet voor het gebruik van natuurkundeformules, die voor hem geïsoleerd van het afgeleideschema functioneren. Tegelijkertijd twijfelt hij vaak over de te volgen procedure en begint soms aan een onjuiste methode waarmee hij vervolgens doorrekent. Zo is het opvallend dat hij in interview 4 bij twee opdrachten de snijpunten van twee grafieken gaat berekenen in plaats van de punten waar de grafieken even steil zijn.

Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid komt vooral naar voren in een toenemend spreken over diverse aspecten van het concept afgeleide, en een sterkere relatie tussen drie procedures om de momentane snelheid te berekenen. De ontwikkeling is minder zichtbaar in verbreding van het repertoire. Daarnaast blijft Otto soms onjuiste procedures noemen.

6.10 De ontwikkeling van Piet

6.10.1 Achtergrond van de leerling

Piet is een leerling die het profiel Natuur en Techniek heeft gekozen met als keuzevak biologie. In vwo 4 beoordeelt wiskundedocent A hem als goede leerling. Naar zijn oordeel toont Piet vooral inzicht bij vraagstukken uit de kansrekening. Bij het wiskundige domein van dit onderzoek, de analyse, toont hij minder inzicht, maar de docent zegt: "*Ik schat Piet hoog in als hij een wiskundig probleem moet oplossen, hoewel hij wel geleerde strategieën zal toepassen*." Verder meldt deze docent dat Piet in vwo 4 niet hard werkt. Dit beaamt Piet: "*Zolang ik zevens haal, waarom zou ik me dan uit de naad werken?*"

Een jaar later in vwo 5 is zijn studiehouding veranderd en zegt hij daarover: "*Het is nu toch wel moeilijk vergeleken met de vierde, het gaat ook wel snel, dat is wel wennen. Ik weet van mezelf dat ik wiskunde moet gaan bijhouden anders wordt het niks, ik heb voor wiskunde ook wel huiswerk gemaakt*." Nog een jaar later in interview 4 zegt Piet: "*Voor wiskunde maak ik wel mijn huiswerk, voor natuurkunde ook wel, scheikunde iets minder. Ik werk harder dan voorgaande jaren*."

Ook Piets wiskundedocent B in vwo 5 en 6 beoordeelt Piet in vwo 6 als goede leerling. Volgens hem is Piet in staat lastige opdrachten op te lossen.

Hij is uiteindelijk geslaagd met voor wiskunde-B12 op het schoolexamen een 7,5 en op het centraal schriftelijk examen een 7,9.

6.10.2 De opdrachten Watertanks-b en Benzine

In tabel 6.10.1 wordt een samenvatting gegeven van Piets werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b* in de opeenvolgende interviews.

Tabel 6.10.1 Piets werkwijze bij de opdracht *Watertanks-b*

Interview 1, april 2006 Piet berekent de gemiddelde uitstroomsnelheid in de laatste 80 minuten met een laag 2-procedure. Hij zegt vervolgens dat zijn berekening bij een lineair verloop past, maar dat in de beschreven situatie de uitstroom steeds langzamer gaat en dus niet lineair is. Hij verandert vervolgens zijn berekening door de gemiddelde uitstroomsnelheid over de eerste 40 minuten te berekenen. Hij berekent dus met de intervalmethode de gemiddelde verandering en noemt dat het niet om een lineair proces gaat.
Interview 2, november 2006 Piet zegt: "*Ik wil een raaklijn opstellen, differentiëren*." Hij berekent vervolgens de afgeleide V' met de kettingregel en berekent de momentane uitstroomsnelheid $V'(40)$ op $t = 40$. Ter controle kijkt hij globaal in de grafiek hoeveel het volume in een tijdsinterval van 40 minuten is afgenomen. Het antwoord lijkt hem "*wel realistisch*" in vergelijking met onderdeel a.
Interview 3, mei 2007 Piet berekent de afgeleide en zegt daarover: "*Dat is gewoon de snelheid*." Daarbij maakt hij een gebaar van een lijn in de lucht. Door een rekenfout geeft hij als antwoord –4444,4 l/min [in plaats van –444,4 l/min]. Hij zegt: "*Ik denk dat dit het is*." Hij zegt geen procedures te kennen om zijn antwoord te controleren. Hij vindt zijn antwoord "*wel heel veel, maar het zou kunnen*". Hij is overtuigd van de procedure, want: "*Nou kijk, je zegt hier* (bij onderdeel a, GR) *dat de afgeleide de snelheid weergeeft, dus dan zou dat hier ook zo zijn*." Hij legt de gevolgde procedure uit: "*Het is de richtingscoëfficiënt, dat is waarmee het verandert, de snelheid waarmee het verandert*." Bij herhaald navragen naar een controlemethode stelt Piet voor de berekening omgekeerd te doorlopen, namelijk door V' gelijk te stellen aan het door hem gevonden antwoord –4444,4. Hieruit kan teruggerekend worden dat $t = 40$. "*Maar dat heeft weinig zin*", aldus Piet, "*want dat heb ik net uitgerekend*." Hij berekent dus het antwoord met symbolisch differentiëren, maar noemt en gebruikt geen andere procedures om zijn antwoord te verbeteren.
Interview 4, november 2007 Piet zegt: "*Je moet gewoon in de grafiek een raaklijn tekenen en dan stel je de formule van die lijn op zeg maar, de snelheid*." Hij begint ditmaal met de raaklijnmethode. Vervolgens geeft hij aan dat de richtingscoëfficiënt ook met de afgeleide berekend kan worden en schrijft op zijn blaadje R.C. = V'. Hij berekent de afgeleide, vult $t = 40$ in en komt op een antwoord van -0,44 m^3/min. Op de vraag naar andere manieren zegt hij: "*Gewoon de oude methode, de richtingscoëfficiënt van die lijn bepalen*." Maar deze laatste procedure vindt hij "*erg onnauwkeurig*". Hij voert alsnog de raaklijnmethode uit. Gevraagd naar nog andere procedures meldt hij dat hij weet dat je de rekenmachine een raaklijn kunt laten tekenen, maar hij kent hiervoor de procedure niet.

Piet berekent in interview 1 bij deze opdracht de gemiddelde uitstroomsnelheid, dus laag 2 in het afgeleideschema. Hij past zijn procedure toe op twee verschillende intervallen, maar hij geeft aan dat zijn antwoorden een lineair karakter hebben, terwijl de tank steeds langzamer leegloopt. In interview 1 is hij sterk gericht op de grafiek. Hij gebruikt het functievoorschrift alleen om de punten in de grafiek te berekenen.
Vanaf interview 2 berekent hij steeds de uitstroomsnelheid met symbolisch differentiëren. Hij relateert vaak de aspecten ‘snelheid’ en ‘richtingscoëfficiënt’ aan het berekenen van de afgeleide. Naast symbolisch differentiëren noemt hij in interview 2 ook de raaklijn maar hij tekent deze niet. In interview 3 weet hij geen andere procedures om de snelheid op één tijdstip te vinden; zelfs als hij in dat interview een onjuist antwoord vindt, komt hij niet tot procedures om zijn antwoord te controleren, anders dan dezelfde procedure achterwaarts te berekenen. In interview 4 gebruikt en noemt hij meer procedures: hij gebruikt de raaklijnmethode om zijn symbolisch berekende antwoord te controleren, al voegt hij eraan toe dat deze methode “*erg onnauwkeurig*” is. Hij zegt dat de rekenmachine ook een raaklijn kan berekenen.

Tabel 6.10.2 Piets werkwijze bij de opdracht *Benzine*

Interview 2, november 2006 Piet zegt dat hij deze formule bij leraar A gezien heeft. Volgens hem heeft Newton deze formule bedacht. Hij legt een relatie tussen de benzineformule, de raaklijn en de snelheid in de uitspraken: “*Dit gebruik je volgens mij om een raaklijn te tekenen*” en “*je kunt de snelheid in een bepaald punt berekenen*.” Hij licht dit verder toe als hij zegt: “*Ja die a dat is dan een punt, en die h, als je een lijn hebt zeg maar en dit is je punt a* [tekent een lijn en een punt op de lijn (zie figuur 6.10.1)] *en je wilt het zeg maar van een stukje weten. Als je hier dan punt b hebt, dat is gewoon een stuk ertussen zeg maar. Bijvoorbeeld 0,1 of zo. Je kan h gewoon naar nul laten naderen. Dan weet je het precies in dat punt*.” En even later interpreteert hij de formule in termen van de situatie: “*Misschien is het het verbruik met betrekking tot de snelheid waarmee je rijdt*.” Piet herkent dat hij een dergelijke formule heeft gezien bij de introductie van de differentiaalrekening. Hij legt globaal het limietproces uit en relateert de raaklijn en het aspect ‘snelheid’ aan de benzineformule.
Interview 3, mei 2007 Piet zegt: “*Volgens mij is dit ook om een raaklijn in een punt te berekenen*.” Hij zegt dat hij zich een uitleg van de leraar herinnert en ook: “*in het boek zeggen ze dat je die h heel klein moest invullen, je kunt ook de h laten staan, dan heb je het exact; volgens mij heeft Newton dat bedacht*.” Hij vult dit aan met: “*Het betekent dus de snelheid waarmee je het verbruikt op een bepaald punt, het is gewoon delta y gedeeld door delta x*.” Piet herhaalt: “*het is sowieso de raaklijn in een punt, de snelheid van verbruik hoe snel de tank leeg raakt op dat moment*.” De interviewer vraagt naar de relatie tussen raaklijn en snelheid en hij zegt: “*Nou het is de richtingscoëfficiënt, dus dat is dan, de richtingscoëfficiënt van een lijn geeft aan, de snelheid waarmee een lijn omhoog gaat of naar beneden, per tijdseenheid, of afstand, per eenheid zeg maar*.” De invloed van *h* beschrijft hij als: “*Hoe kleiner hoe nauwkeuriger op dat punt.*” Hij noemt naar aanleiding van de benzineformule meerdere aspecten zoals ‘snelheid’, ‘delta *y* gedeeld door delta *x*’, ‘richtingscoëfficiënt’. Een uitleg binnen de situatie, dus in termen van gemiddeld verbruik, ontbreekt.

Interview 4, november 2007
Piet zegt dat deze formule een "*makkelijke manier is om de afgeleide te doen*". Dan zegt hij dat het om het precieze verbruik in een punt gaat. Hij schrijft op: 'h is een hele kleine Δx zodat je in (nagenoeg) 1 punt de Δy berekent wat weer de richtingscoëfficiënt is; de 'snelheid' van verbruik'.
De interviewer zegt dat dit iets anders is dan hij net heeft gezegd. Piet zegt dat hij het wel zo bedoelt. "*Je berekent de snelheid van verbruik. Net als bij de tank die leegloopt.*" Hij vult aan: "*Het is wel weer dat je de richtingscoëfficiënt van die raaklijn zeg maar de delta-y berekent. Ik bedoelde het net wel hoor!*"
Over de invloed van *h* zegt hij: "*Een kleinere h geeft een verschil in nauwkeurigheid. Als je bijvoorbeeld voor die h 10 neemt, dan meet je dus eigenlijk een delta-x van 10 maar dat is op deze grafiek zo een stuk! Dus dan doe je de raaklijn aan dat stuk in plaats van aan een punt.*"
Weer noemt hij meerdere aspecten, maar spreekt hij niet over het gemiddelde verbruik over een traject.

In tabel 6.10.2 wordt Piets werkwijze bij de redeneeropdracht *Benzine* weergegeven. Piet noemt in de interviews 2 en 3 expliciet de herkenning van de formule uit de wiskundeles en legt in beide interviews een relatie met Newton die dit volgens hem heeft bedacht. Vervolgens verklaart hij in interview 2 de betekenis van de formule door te spreken over raaklijn en snelheid. Hij relateert in alle interviews de benzineformule aan de grafische representatie en aan het natuurkundige begrip 'snelheid'.
In interview 2 noemt hij het aspect 'richtingscoëfficient in een bepaald punt' nog niet, maar vanaf interview 3 wel. In alle interviews noemt hij de mogelijkheid om voor *h* een klein getal te nemen en relateert dit aan het limietproces in de grafische representatie.

Figuur 6.10.1 Schets van Piet bij de opdracht *Benzine* (I-2, nov 2006)

Hij interpreteert de formule vooral door aspecten te noemen als 'richtingscoëfficiënt', 'delta y gedeeld door delta x' en 'snelheid'. De koppeling met de beschreven situatie komt sporadisch naar voren, bijvoorbeeld in de uitdrukking: "*de snelheid van verbruik*", maar Piet gebruikt in geen van de interviews grootheden zoals 'liter' of 'kilometer' om de formule in de situatie te interpreteren.

6.10.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In tabel 6.10.3 is weergegeven welke procedures Piet in de opeenvolgende interviews gebruikt of noemt.

Tabel 6.10.3 Door Piet gebruikte procedures

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inter view	Interval methode laag 2	Klein-interval-methode laag 3	Koorden-methode laag 2	Raaklijn-methode laag 3	Reken-machine-optie laag 3	Grafiek afge-leide laag 4	Symbolisch differentiëren laag 4	Af-lezen rico	Natuur-kunde for-mules	Econo-mie for-mules
I-1	●●⭘⭘									
I-2	●			○			●●○		○	
I-3	●			⭘			●⭘		●⭘	
I-4				●○	○		●●●●●●		●	

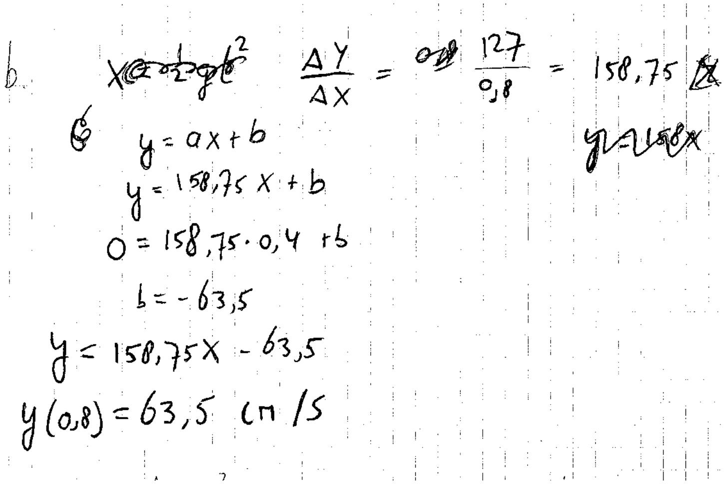
●: accuraat uitgevoerd; ⭘: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd.
De coderingen van de interviews 2 en 4 zijn gebaseerd op identieke opdrachten.

Indicator 1.1. Het kiezen van een adequate procedure
Piet kiest in de opeenvolgende interviews respectievelijk vier, zes, zes en tien maal een adequate procedure. In interview 1 betreft dit alleen de intervalmethode, in interview 4 is zijn voorkeur geheel verschoven naar het gebruik van symbolisch differentiëren om een antwoord te berekenen. De meeste procedures die hij in interview 2 kiest, gebruikt hij in interview 4 weer.

Indicator 1.2. De breedte van het repertoire
In de eerste drie interviews is Piets repertoire beperkt. Hij gebruikt vaak één procedure voor een opdracht (zie bijlage D). Bij de opdracht *Watertanks-b* (zie tabel 6.10.1) blijkt bijvoorbeeld dat hij in de interviews 1, 2 en 3 de raaklijnmethode éénmaal noemt maar deze procedure vervolgens niet uitvoert. Als gevraagd wordt naar controlemethoden schat hij vaak of de grootte van het berekende antwoord kan kloppen. Als het antwoord te groot of te klein is gaat hij na of zijn berekening klopt. De strategie heeft soms succes (zie tabel 6.10.1, I-2). Soms denkt Piet echter dat de orde van grootte van een onjuist antwoord wel goed kan zijn (zie tabel 6.10.1, I-3). De controlevraag leidt in de eerste interviews meestal niet tot alternatieve procedures.
In interview 4 gebruikt Piet bij enkele opdrachten wel meerdere procedures, maar zijn voorkeur gaat uit naar het symbolisch differentiëren. Grafische en numerieke procedures vindt hij niet exact. Hij zegt bijvoorbeeld over de raaklijnmethode dat "*het altijd minder exact is dan met formules*".

Indicator 1.3. De samenhang van het repertoire
In de interviews 1 en 2 relateert Piet procedures niet of nauwelijks aan elkaar. In interview 2 legt hij bijvoorbeeld wel een relatie tussen raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren: "*ik wil een raaklijn opstellen, differentiëren*", maar de raaklijnmethode wordt in interview 2 door hem niet uitgevoerd om

zijn berekende antwoord te controleren. In interview 3 past hij bij de opdracht *Tikkerband-b* wel de raaklijnmethode toe, maar uit zijn werkwijze blijkt dat hij onzeker is over de te volgen procedure. Hij stelt namelijk de gehele formule van de raaklijn op en vult vervolgens een waarde van *t* in de raaklijnformule in om de momentane snelheid te vinden. Hij zegt daarbij: "*Ik heb net gesteld dat die lijn, de raaklijn, de afgeleide is. Dus wat je hier dan invult met 0,8 is dan de snelheid.*" Hieruit blijkt dat hij in interview 3 niet herkent dat de richtingscoëfficiënt al de gevraagde snelheid levert (figuur 6.10.2).



Figuur 6.10.2 Piet herkent niet dat de richtingscoëfficiënt al de gevraagde snelheid is (I-3)

In interview 4 bij de opdracht *Watertanks-b* relateert hij de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren goed aan elkaar. Aan de andere kant zijn er twee opdrachten, één in interview 3 en één in interview 4, waarin hij de raaklijnmethode goed had kunnen gebruiken om een onjuist antwoord te controleren. In interview 3 berekent hij bijvoorbeeld met de afgeleide een uitstroomsnelheid van 4444 l/min, terwijl het 444 l/min moet zijn (zie tabel 6.10.1, I-3). Alhoewel hij het antwoord wel groot vindt, gebruikt hij geen grafische of numerieke controlemethoden.

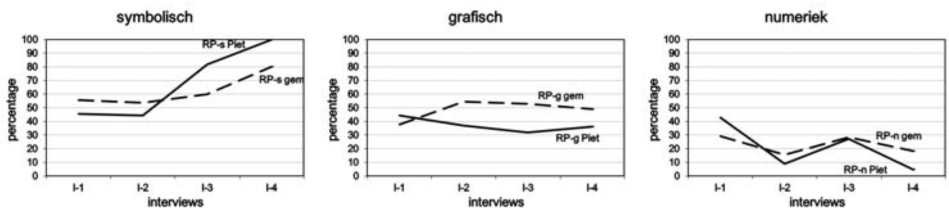
Relaties tussen natuurkundeformules en bij wiskunde behandelde procedures legt hij in de interviews 1, 2 en 3 niet. Een voorbeeld hiervan is te zien bij de opdracht *Kogel* in interview 2 waar hij de formule $s = v \times t$ gebruikt en afgelezen waarden voor *s* en *t* invult. Ter controle overweegt en probeert Piet of hij de formule $x = \frac{1}{2}vt^2$ zou kunnen gebruiken; een formule met uiterlijke gelijkenis met andere natuurkundeformules. Bovenstaande werkwijze (het zoeken naar een natuurkundeformule die past bij de gegevens) gebruikt hij ook in interview 3, onder andere bij *Tikkerband-b*, waar hij kiest voor de formule $x = \frac{1}{2}gt^2$ (zie doorgekraste formule in figuur 6.10.2) maar

concludeert: "*Deze formule is overbodig, omdat je alles wat er in staat weet; dus waar moet je het nog voor gebruiken?*"
In interview 4 legt Piet de relatie tussen natuurkundeformules en wiskundige procedures enigszins. Hij berekent eerst de afgeleide formule en noteert deze als v = -9,8t, en vult vervolgens t = 0,24 in om de valsnelheid te vinden. Hij redeneert in interview 4: "*Die afgeleide is de snelheid, de afgeleide van de snelheid is weer de versnelling* [...] *als je de snelheid nog een keer zou afleiden, zou er -9,8 uitkomen en dat is de valversnelling, de g zeg maar, de zwaartekracht.*" Hij zegt nog dat in de formule voor de hoogte van de vallende kogel de natuurkundeformule $x = \frac{1}{2}gt^2$ herkenbaar is, want hij legt uit in interview 4: "*Los van de 0,9 , is dit een half g t kwadraat. De helft van 9,8 is 4,9 dus en die 0,9 is dan je beginhoogte zeg maar.*"

Samenvatting van breedte en samenhang van het repertoire
Piet heeft in de interviews 1, 2 en 3 een smal en onsamenhangend repertoire. In interview 4 is zijn repertoire nog steeds smal maar relateert hij de procedures symbolisch differentiëren, de raaklijnmethode en natuurkundeformules beter aan elkaar. Piet zegt in alle interviews dat hij de voorkeur geeft aan rekenen met formules omdat hij grafische en numerieke procedures niet exact vindt.

6.10.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide.

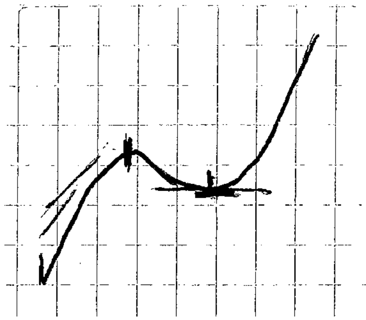
Indicator 2.1 Het gebruik van representaties
In figuur 6.10.3 is het verloop van de representatiepercentages voor de symbolische, grafische en numerieke representatie van Piet afgezet tegen het gemiddelde van de tien leerlingen.



Figuur 6.10.3 Verloop van de representatiepercentages van Piet

In interview 1 redeneert Piet veelal grafisch en als alternatief numeriek. Een voorbeeld bij de opdracht *Watertanks-b* is zijn grafische redenering dat de door hem berekende gemiddelde uitstroomsnelheid over een interval niet het antwoord op de vraag is (tabel 6.10.1).
Hij doet in interview 1 meerdere uitspraken gebaseerd op het globale gedrag van een grafiek, zoals: '*hier gaat hij* (de grafiek, GR) *steiler en hier minder steil*"

of "*hier lopen ze gelijk*". Hoewel hij in interview 1 grafische redeneringen gebruikt, blijkt hij in alle interviews zelden een grafiek te plotten met de grafische rekenmachine. In interview 2 bij de opdracht *Monopolie* oriënteert hij zich door uit de hand een schets te maken van een grafiek (zie figuur 6.10.4), terwijl uit een plot was gebleken dat deze schets niet goed overeenkomt met de werkelijke grafiek.



Figuur 6.10.4 Schets van de grafiek van de derdegraads kostenfunctie (I-2)

Piet maakt vanaf interview 2 duidelijk dat hij de symbolische representatie prefereert boven de grafische. Hij zegt bijvoorbeeld in interview 2: "*Ik vind het leuker om dingen al rekenend, met algebra zeg maar kloppend uit te rekenen*", en in interview 4: "*Ik ben dan wel zo, ik bereken het liever dan dat ik het teken zeg maar*." Deze voorkeur voor de symbolische representatie komt in de interviews 2, 3 en 4 steeds vaker naar voren. Vanaf interview 2 differentieert hij steeds vaker functies en vermindert het gebruik van vooral de numerieke en in mindere mate de grafische representatie. Bij redeneeropdrachten gebruikt Piet ook geen grafische of numerieke representatie.

Indicator 2.2 Aspecten van het concept afgeleide

Het aspect 'snelheid' speelt een steeds grotere rol in de opeenvolgende interviews (zie tabel 6.10.4). Het spreken over afgeleiden wordt door Piet namelijk vaak gekoppeld aan het aspect 'snelheid', waarbij een toenemend gebruik zichtbaar is van interview 2 naar interview 4.

Tabel 6.10.4 Het aantal door Piet genoemde aspecten

Aspecten	steil/ steilheid	helling	richtings-coëfficiënt	snelheid	toename	delta y / delta x	anders
I-1	1						
I-2			2	3			
I-3			3	5	1	1	1 (MK)
I-4			2	5	1	1	

Daarbij verwoordt hij in de interviews 2 en 4 ook dat er een relatie bestaat tussen afstand, snelheid en versnelling. In interview 2 kan hij deze relatie niet goed uitleggen want hij zegt: "*Het zijn gewoon afgeleides van elkaar, dat zijn al die snelheid en versnellingen toch ook van elkaar*" en: "*Tijd is de afgeleide van snelheid, ik weet het niet helemaal zeker*." In interview 4 relateert hij afstand, snelheid en versnelling goed aan elkaar.
Doordat Piet aan verschillende opdrachten het snelheidsaspect relateert, kiest hij in interview 3, maar vooral in interview 4 voor alle opdrachten de procedure symbolisch differentiëren.
In opdrachten waar de tijd niet de onafhankelijke variabele is, levert het woord 'snelheid' verwarring op. In de benzineformule zegt hij bijvoorbeeld dat de formule staat voor "*de snelheid waarmee je de benzine verbruikt* ***op dat moment***" (zie tabel 6.10.2, I-3). Bij het interpreteren van $TK'(20)$ zegt hij: "*Het zal wel weer iets met snelheid zijn*." En bij de opdracht *Remweg-b* zegt hij direct na de start van de opdracht: "$R'(v)$*, dus dan is dit de snelheid*."
Vanaf interview 3 relateert Piet naast het aspect 'snelheid' ook andere aspecten aan de verschillende opdrachten. In tabel 6.10.2 blijkt dat hij bij de opdracht *Benzine* ook aspecten als 'richtingscoëfficiënt', 'delta y gedeeld door delta x' en 'toename per eenheid' noemt. Ook bij de economie-opdracht in interview 3 memoriseert hij economische kennis door de betekenis van $TK'(20)$ uit te leggen met marginale kosten en de meerkosten per product. Hij zegt: "*Volgens mij zijn het dan de marginale kosten, hoeveel meer het kost, per product dat je meer maakt zeg maar* [...] *bij wiskunde stond dat een keer in het boek, bij ook zo'n som, marginale kosten noemden ze dat dan*."

Samenvatting van representaties en aspecten van het concept afgeleide
Piet toont vanaf interview 2 een voorkeur voor de symbolische representatie en gaat steeds vaker symbolisch differentiëren om een opdracht op te lossen. Hij relateert de symbolische representatie soms wel in woorden aan de grafische representatie maar hij voert grafische procedures zelden uit. De numerieke representatie komt na interview 1 zelden in zijn werk naar voren.
Vanaf interview 2 gaat Piet afgeleiden steeds sterker relateren aan het aspect 'snelheid'. Naast snelheid relateert hij in de interviews 3 en 4 ook andere aspecten aan het concept afgeleide. Het relateren van het aspect 'snelheid' aan verschillende opdrachten maakt dat hij steeds meer opdrachten oplost met dezelfde procedure. Het gebruik van het woord snelheid bemoeilijkt voor hem een correcte interpretatie van opdrachten waarin de tijd niet de onafhankelijke variabele is.

6.10.5 De ontwikkeling van Piets wiskundige bekwaamheid

In de interviews 1, 2 en 3 lost Piet weinig opdrachten accuraat op. Hij beschikt over een smal en onsamenhangend repertoire. Hoewel hij een enkele maal een grafische of numerieke laag 2- of laag 3-procedure noemt of gebruikt, gaat zijn voorkeur in de loop van de interviews steeds meer uit naar de laag 4-procedure symbolisch differentiëren. Dit gaat samen met een toenemend gebruik van het aspect 'snelheid'. In zijn redeneringen in interview 3 en vooral interview 4 komt de relatie tussen afgeleide en 'snelheid' centraal te staan. Daardoor kiest hij uiteindelijk in interview 4 bij alle berekenopdrachten voor de procedure symbolisch differentiëren. Ook bij redeneeropdrachten zoals *Remweg* en *Benzine* noemt hij meerdere aspecten, maar het lukt hem niet de benzineformule en de remwegformule in termen van de beschreven situatie te interpreteren. Dit komt vooral doordat het aspect 'snelheid' niet goed bruikbaar is in opdrachten waarin de tijd niet de onafhankelijke variabele is.

Piets werk kenmerkt zich door zijn voorkeur voor de symbolische representatie. Hij gebruikt de grafische en numerieke representatie minder omdat deze volgens hem niet nauwkeurig zijn. Hij heeft in de loop van de interviews een voorkeur voor het aspect 'snelheid', welke hij relateert aan afgeleiden en differentiëren.

Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid is bij Piet vooral zichtbaar in het relateren van meerdere aspecten van het concept afgeleide aan de verschillende situaties en aan elkaar. Een grote stap in zijn ontwikkeling vindt plaats van interview 3 naar 4. Piet gebruikt in interview 4 bij veel opdrachten dezelfde symbolische procedure omdat het volgens hem bij de verschillende situaties steeds om hetzelfde aspect gaat. Ontwikkeling in de breedte van zijn repertoire is minder zichtbaar.

Hoofdstuk 7 Synthese van de resultaten

In hoofdstuk 6 zijn de tien casussen beschreven. In dit hoofdstuk worden deze naast elkaar geplaatst en worden overeenkomsten en verschillen geanalyseerd in de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. Net als bij de casussen wordt ingegaan op de achtergrond van de leerlingen (7.1), de uitspraken en handelingen bij de twee opdrachten (7.2), breedte en samenhang van het repertoire (7.3) en het gebruik van representaties en aspecten van het concept afgeleide (7.4). In paragraaf 7.5 worden de resultaten besproken in relatie met de onderwijscontext op beide scholen.

7.1 Achtergronden van de leerlingen

Van de tien leerlingen in dit onderzoek hebben zes het profiel Natuur en Techniek (N&T) gekozen en vier het profiel Natuur en Gezondheid (N&G). De zes N&T-kiezers zijn allen jongens, de N&G–kiezers zijn allen meisjes. Aangezien bij de start van het onderzoek de gekozen leerlingen nog geen profielkeuze hadden gemaakt is deze verdeling over jongens en meisjes onafhankelijk van het onderzoek tot stand gekomen. Vier leerlingen hebben in vwo 5 economie als keuzevak gekozen. Ook deze keuze is na de start van het onderzoek gemaakt.

De wiskundedocenten van vwo 4 is gevraagd de leerlingen in te delen als ‘zwak’, ‘gemiddeld’ of ‘goed’. Vijf leerlingen worden ingedeeld als goed, vier als gemiddeld en één als zwak. Dezelfde vraag is twee schooljaren later gesteld aan de wiskundedocenten van vwo 6. Nu is de verdeling: drie goed, vijf gemiddeld en twee zwak (zie tabel 7.1). Zes leerlingen (Andy, Bob, Elly, Maaike, Otto en Piet) worden in vwo 6 op hetzelfde niveau ingeschat als in vwo 4, twee leerlingen (Casper en Dorien) verschuiven van goed naar gemiddeld, terwijl één leerlinge (Karin) van gemiddeld naar goed verschuift. Alleen Nico verschuift twee niveaus: van goed naar zwak.

De eindcijfers voor wiskunde-B1(2) van de drie door de vwo 6 docent als goed aangeduide leerlingen (Bob, Karin en Piet) zijn respectievelijk een 7,3, een 9,2 en een 7,7. Voor de twee als zwak aangeduide leerlingen (Elly en Nico) zijn de eindcijfers respectievelijk een 5,9 en een 4,9.

De eindcijfers van de andere leerlingen variëren tussen 6,0 en 7,5. Acht leerlingen scoren op het Centraal Schriftelijk Examen (CSE) hoger dan op hun Schoolexamen (SE) waarbij Andy en Maaike zelfs respectievelijk 1,8 en 2,0 punten hoger halen.

Tabel 7.1 Gegevens van de leerlingen

	Andy	Bob	Casper	Dorien	Elly	Karin	Maaike	Nico	Otto	Piet
profiel	N&T	N&T	N&T	N&G	N&G	N&G	N&G	N&T	N&T	N&T
keuzevak	ak	ec12	ec12	na2	ec12	gs	sp	ec12/ak	bio	bio
indeling vwo 4	gem	goed	goed	goed	zwak	gem	gem	goed	gem	goed
indeling vwo 6	gem	goed	gem	gem	zwak	goed	gem	zwak	gem	goed
SE / CSE	6,5/8,3	7,0/7,6	6,9/8,0	7,6/5,6	5,9/5,9	8,7/9,6	6,3/8,3	4,5/5,3	5,5/6,4	7,5/7,9
eindcijfer wi-B1 of wi-B12	7,4	7,3	7,5	6,6	5,9	9,2	7,3	4,9	6,0	7,7

7.2 De opdrachten *Watertanks-b* en *Benzine*

In hoofdstuk 6 zijn per leerling de uitwerkingen van twee opdrachten beschreven. De berekenopdracht *Watertanks-b* toetst de ontwikkeling in breedte en samenhang van het repertoire en kan aanleiding geven tot het noemen van aspecten van het concept afgeleide (deelvragen 1 en 2). De redeneeropdracht *Benzine* kan aanleiding geven tot uitspraken over aspecten van het concept afgeleide en het aan elkaar relateren van deze aspecten (deelvraag 2). In deze paragraaf wordt een vergelijking gemaakt tussen de leerlingen betreffende gebruikte procedures bij de opdracht *Watertanks-b* en genoemde aspecten bij de opdracht *Benzine*.

7.2.1 De opdracht Watertanks-b

De leerlingen gebruiken een aantal procedures om de opdracht *Watertanks-b* op te lossen. Deze zijn in tabel 7.2 gecategoriseerd.

Tabel 7.2 Gebruikte procedures voor de opdracht *Watertanks-b*

Laag 1	$V(40)$: de functiewaarde voor $t = 40$ *(niet adequaat)*
Laag 2	$V(40)/40$: het volume op $t = 40$ gedeeld door de verstreken tijd *(niet adequaat)*
	$V(40)/80$: de gemiddelde uitstroomsnelheid van over de laatste 80 minuten *(niet adequaat)*
	$V(41) - V(40)$ of $V(40) - V(39)$: afname op een interval van 1 minuut
Laag 3	Klein-intervalmethode: $(V(40{,}001) - V(40))$ / 0,001 of $(V(39{,}999) - V(40))/0{,}001$
	Rekenmachine-opties: mogelijke opties zijn dy/dx, Tangent, of Nderiv
	Raaklijnmethode: tekenen raaklijn en bepalen richtingscoëfficiënt
Laag 4	Symbolisch differentiëren: de afgeleide waarde op $t = 40$

Laag 2-, laag 3- en laag 4-procedures zijn voor interview 1 niet expliciet behandeld bij wiskunde. Wel is op school A voor interview 1 de raaklijnmethode geïntroduceerd bij natuurkunde. Daarmee berekenen leerlingen de snelheid van een object op basis van een gegeven *x*-*t*-diagram. Tabel 7.3 geeft een overzicht van de procedures zoals die door de tien leerlingen zijn gebruikt.

Tabel 7.3 Gebruikte procedures bij de opdracht *Watertanks-b*

	Interview 1										Interview 2										Interview 3										Interview 4									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
V(40)					○	○			○																															
V(40)/40							○	○							○	○											○													
V(40)/80				◉						◉															○															
V(41)-V(40)	●		●																																					
klein-int.											◉		◉				◉				○	●									○		○				●			
rekenmach.											●								◉		●										●	○						●	●	○
raaklijn	○	●									○	●	◉	●		●		●	○	○	●	○	●	○		◉		◉	●		●	○	○	◉	○	●		○	●	●
V′(40)														◉				◉	◉	●		◉	◉	●		●		◉	●	◉		●	●	●		◉	◉	◉	◉	●

●: accuraat uitgevoerd; ◉: niet accuraat uitgevoerd; ○: genoemd, niet uitgevoerd

In *interview 1* gebruiken de leerlingen, zoals verwacht, geen laag 4-procedures. Twee leerlingen noemen een laag 3-procedure, de raaklijnmethode, maar voor beide leerlingen is het onzeker of deze procedure gebruikt mag worden. Zes leerlingen noemen of gebruiken de volgende laag 2-procedures:

- het berekenen van de afname tussen t = 40 en t = 41 (twee leerlingen);
- het berekenen van V(40)/80 waarbij wordt opgemerkt dat in de opdracht eigenlijk een momentane snelheid gevraagd wordt (twee leerlingen);
- het delen van het aanwezige volume door de verstreken tijd (twee leerlingen).

Drie leerlingen gaan ervan uit dat de waarde V(40) de gevraagde uitstroomsnelheid is. Leerlinge Elly zegt dat de letter V bij natuurkunde voor de snelheid staat. Of deze interpretatie bij de andere twee leerlingen ook een rol speelt is niet duidelijk.

In de periode voor interview 2 is de differentiaalrekening geïntroduceerd bij wiskunde. In *interview 2* is het gebruik van laag 3- en laag 4-procedures toegenomen ten opzichte van interview 1. Alleen Elly en Karin gebruiken nog een laag 2-procedure die niet tot een juiste oplossing leidt. Van de laag 3-procedures wordt de raaklijnmethode het meest gebruikt. Acht leerlingen noemen deze procedure, van wie vier deze ook accuraat uitvoeren. Ondanks de introductie van de differentiaalrekening gebruiken maar vier leerlingen het symbolisch differentiëren. Piet is de enige die dit accuraat doet. In interview 2 varieert de breedte van het repertoire van één tot drie procedures: drie leerlingen (Bob, Elly en Maaike) gebruiken in interview 2 één procedure om de opdracht op te lossen waarbij Bob de enige van dit drietal is die zijn gekozen procedure accuraat uitvoert. Vijf leerlingen noemen of gebruiken twee procedures (Casper, Dorien, Karin, Nico en Piet). Twee leerlingen (Andy en Otto) gebruiken drie procedures maar Otto voert geen van deze procedures accuraat uit.

In *interview 3* neemt het accuraat gebruik van de raaklijnmethode (laag 3) en het symbolisch differentiëren (laag 4) toe. Acht leerlingen kiezen een adequate methode waarbij de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren elk zeven keer gekozen worden. Alleen Elly en Maaike kiezen geen adequate procedures om de momentane verandering te berekenen. De breedte van het repertoire neemt niet toe, want ook nu noemen of gebruiken drie leerlingen één procedure, vijf leerlingen twee procedures en twee leerlingen drie procedures.

In *interview 4* is een verbreding van het repertoire zichtbaar. Negen leerlingen noemen of gebruiken twee of meer procedures, van wie zes leerlingen drie procedures noemen.

In dit interview combineren zeven leerlingen de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren. De raaklijnmethode wordt door drie leerlingen niet uitgevoerd, omdat ze overtuigd zijn van de correctheid van hun door symbolisch differentiëren berekende antwoord. Drie leerlingen die de combinatie van de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren in interview 4 niet gebruiken geven verschillende reacties:

- Elly zegt: "*Ik zit nu te bedenken of ik een raaklijn ga tekenen; dan heb ik weer een gemiddelde snelheid als het goed is*." Ze voert deze procedure niet uit.
- Maaike vraagt op een bepaald moment: "*Het is niet zo dat als je die differentieert dat daar de snelheid uitkomt*?" Door het maken van een volgende opdracht beseft ze dat ze de uitstroomsnelheid toch met symbolisch differentiëren kan berekenen.
- Andy gebruikt alle laag 3-procedures. Die behoren al sinds interview 2 tot zijn repertoire. Maar symbolisch differentiëren noemt hij niet als procedure.

In interview 4 is een toename van het gebruik van rekenmachine-opties zichtbaar; vijf van de tien leerlingen noemen of gebruiken een rekenmachine-optie om een momentane verandering te vinden.

Samengevat, in de opdracht *Watertanks-b* is na de introductie van de differentiaalrekening een verschuiving te zien van laag 1- en 2- naar laag 3- en 4-procedures. De raaklijnmethode wordt in interview 2 het meest gebruikt, terwijl het symbolisch differentiëren nog weinig wordt toegepast. In interview 3 komt het gebruik van de combinatie van deze twee procedures bij zeven leerlingen voor en in interview 4 bij acht van de tien leerlingen. Numerieke procedures worden in alle interviews beperkt ingezet. Alleen Andy en Maaike gebruiken in meerdere interviews de klein-intervalmethode. Het repertoire is breder geworden van interview 1 naar 2 en van interview 3 naar 4. Van interview 2 naar 3 neemt de breedte van het repertoire niet toe.

7.2.2 De opdracht Benzine

In de interviews 2, 3 en 4 is de redeneeropdracht *Benzine* opgenomen. In deze opdracht moet de formule $\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$ geïnterpreteerd worden. Zoals blijkt uit de beschrijving van de casussen (zie hoofdstuk 6) is er een grote variatie in uitspraken over deze formule. Deze uitspraken worden ingedeeld in de volgende drie categorieën: gemiddeld verbruik, limietproces en aspecten van het concept afgeleide.

- *Gemiddeld verbruik*: leerlingen interpreteren de formule in termen van gemiddeld verbruik of verbruik per kilometer en redeneren in termen van de beschreven situatie.
- *Limietproces*: leerlingen doen uitspraken over het laten naderen van *h* naar nul en noemen hiermee het limietproces. Deze uitspraken kunnen verschillen in duidelijkheid. Een voorbeeld van een ‘onduidelijke uitspraak’ is die van Dorien in interview 2: “*Als h kleiner werd, werd **het** nauwkeuriger*.” Dorien legt niet uit wat ze met het woord ‘het’ bedoelt. Casper legt in interview 2 het limietproces nauwkeuriger uit aan de hand van een grafiek, hoewel ook zijn uitspraken niet geheel duidelijk zijn: “*Je kiest twee punten en daar tussenin ga je zitten maar het is heel minuscuul raaklijnachtig wat je tekent, berekent*. […] *Je kiest heel dichtbij een puntje hier en een puntje daar*. *Er zit dan een lijntje en dat raakt dan niet deze grafiek hier, dus je berekent niet dat punt maar de benadering daarvan*.”
- *Aspecten van het concept afgeleide*: leerlingen noemen aspecten van het concept afgeleide zoals ‘richtingscoëfficiënt’, ‘gemiddelde toename’ of ‘differentiequotiënt’.

Tabel 7.4 Categorisering van de uitspraken over de opdracht *Benzine*

	Interview 2										Interview 3										Interview 4									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
gemiddeld verbruik		0				0			0		0	++		++				0			++	++		++		++		++	0	
limietproces			+	0			+		0	+			+				+			+		+	+	+					+	+
aspecten			0						0	0				+					+	+			+	+		0			+	+

0: uitspraak is onduidelijk; + uitspraak redelijk duidelijk; ++ correcte uitspraak

In tabel 7.4 zijn de uitspraken van de leerlingen in de drie categorieën ingedeeld. In interview 2 lukt het geen enkele leerling de benzineformule te interpreteren in termen van de situatie als gemiddeld verbruik op een traject van *h* kilometer. Ook uitspraken over het limietproces of andere aspecten van het concept afgeleide komen weinig voor en zijn vaak onduidelijk.

In interview 4 is dit verschoven naar vijf leerlingen die de formule betekenis geven als gemiddeld verbruik, terwijl zes leerlingen meer en betere uitspraken doen over het limietproces en andere aspecten van het concept afgeleide. Aspecten die genoemd worden zijn 'richtingscoëfficiënt' (Otto en Piet), 'steilheid' (Casper en Dorien), 'verandering' (Casper), 'deling van delta y door delta x' (Dorien, Karin, Otto en Piet) en 'snelheid van verbruik' (Dorien, Karin, Otto en Piet). Vier leerlingen noemen ook de relatie met afgeleiden (Casper, Dorien, Karin en Piet).
Alleen Elly kan in geen van de interviews betekenis geven aan de benzineformule. Zij interpreteert in de interviews 3 en 4 de formule $V(a + h)$ als $Va + Vh$. In hoofdstuk 6 blijkt dat meer leerlingen de notatie in deze opdracht niet goed interpreteren. Ook Nico ziet $V(a + h)$ in interview 2 als een product. Enkele leerlingen reduceren de formule tot $V(h)/h$ (Andy in de interviews 2 en 3, Karin en Nico in interview 3).
In tabel 7.4 komt een patroon naar voren bij leerlingen die vanaf interview 2 de benzineformule direct relateren aan aspecten van het concept afgeleide. Deze leerlingen (Casper, Dorien, Maaike, Otto en Piet) zijn in de loop van de interviews steeds beter in staat de formule uit te leggen in termen van het limietproces en kunnen relaties met andere aspecten van het concept afgeleide noemen. Maar het blijkt voor hen moeilijk de formule te interpreteren binnen de beschreven situatie. Het spreken over gemiddeld verbruik is bij deze vijf leerlingen zeldzaam; alleen Dorien maakt hierin progressie. Bij de andere vijf leerlingen is er één (Elly) die de formule niet kan uitleggen, twee (Andy en Nico) die de formule steeds beter binnen de situatie interpreteren en twee (Bob en Karin) die in eerste instantie de formule alleen in de situatie interpreteren, maar in interview 4 ook relaties leggen met aspecten van het concept afgeleide.

Samengevat, leerlingen blijken in de opeenvolgende interviews de benzineformule steeds beter te interpreteren. Uiteindelijk geven vijf leerlingen in interview 4 een correcte betekenis in termen van de situatie. Ook de uitspraken over aspecten van het concept afgeleide nemen in aantal en kwaliteit toe. Daarbij doet het volgende patroon zich voor:

- Leerlingen die de formule interpreteren in termen van aspecten van het concept afgeleide hebben moeite met interpretatie in termen van de situatie.
- Leerlingen die de formule vooral interpreteren in de situatie doen minder uitspraken over aspecten van het concept afgeleide.

7.3 Breedte en samenhang van het repertoire

In hoofdstuk 6 is per leerling weergegeven welke procedures in de opeenvolgende interviews gebruikt worden. In tabel 7.5 zijn de procedures gepresenteerd bij de vijf gemeenschappelijke opdrachten van de interviews 2 en 4. Op basis van tabel 7.5 en de beschrijvingen van de casussen in hoofdstuk 6 wordt ingegaan op de keuze voor adequate procedures (7.3.1), de breedte van het repertoire (7.3.2) en de samenhang van het repertoire (7.3.3). In 7.3.4 wordt de ontwikkeling in breedte en samenhang van het repertoire beschreven.

7.3.1 Het kiezen van een adequate procedure

De keuze van een adequate procedure wordt zichtbaar als een leerling een procedure gebruikt die tot een oplossing van de opdracht kan leiden. Hieronder wordt ingegaan op de gebruikte procedures van tabel 7.5.

Tabel 7.5 Door de leerlingen gebruikte procedures in de interviews 2 en 4

		Interview 2										Interview 4									
		A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
1	interval-methode	●		●◎ ○	●	●	●		◎		●	●	○			●		◎	●		
2	klein-interval-methode	◎		◎				◎◎				○		○				●○			
3	koorden-methode		◎			○	○											○	○		
4	raaklijn-methode	●◎ ○	●● ●	●◎	●● ○		●● ◎		●●	○○ ○	○	●○	○○	○○	●◎	○	●○ ○		○○	●○	●○
5	rekenmachine-optie	●● ●●								◎◎		●● ●	○						●	●	○
6	grafiek *f´*			●●	●○			◎				●◎	●●	●● ○	●				●		
7	symbolisch differentiëren		◎○	●● ●	●● ●◎ ○		◎○	◎◎	●● ◎◎ ○	◎◎ ◎	●● ○	●	●● ●● ○	●● ●● ●	●● ●○ ○		●● ◎◎ ○	●● ●● ●	●● ◎◎ ◎	●● ◎○	●● ●● ●●
8	aflezen rico		●										●	●	●		●				
9	natuurkunde-formules		◎			○		◎	○		○	●	●	◎	●	●	○	○	○	◎○	●
10	economie-formules													●							

● : accuraat uitgevoerd; ◎ : niet accuraat uitgevoerd; ○ : genoemd, niet uitgevoerd.

De *intervalmethode* en de *klein-intervalmethode* (procedures 1 en 2) worden in de interviews 2 en 4 respectievelijk door acht en zes van de tien leerlingen genoemd of gebruikt. Deze intervalmethoden worden echter niet vaak uitgevoerd vooral niet in interview 4. Dit heeft te maken met de toenemende voorkeur voor symbolische procedures boven numerieke procedures. Uitzonderingen zijn Andy, Casper en Maaike. Andy en Maaike gebruiken beiden de intervalmethoden als controlemethode voor antwoorden die met een andere methode zijn berekend. Casper onderzoekt in interview 2 vaak met een tabel op zijn grafische rekenmachine de toe- of afnames van de uitkomsten van een formule.

De *koordenmethode* (procedure 3) wordt in beide interviews nauwelijks gebruikt.

De *raaklijnmethode* (procedure 4) wordt in interview 2 door acht leerlingen gebruikt of genoemd bij één of meer opdrachten. In interview 4 wordt deze methode door zes van deze acht leerlingen minder gebruikt dan in interview 2. Deze leerlingen geven aan het symbolisch differentiëren efficiënter te vinden. Twee leerlingen, Maaike en Elly, gebruiken in de interviews 2 en 4 de raaklijnmethode niet, hoewel Elly zich in interview 4 afvraagt of ze de uitstroomsnelheid met een raaklijn zou kunnen berekenen.

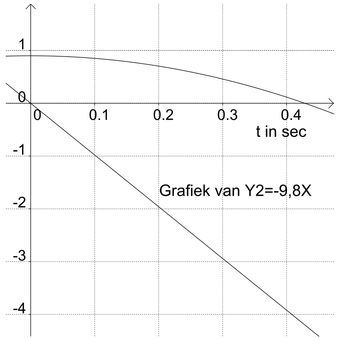
Een *rekenmachine-optie* (procedure 5) wordt door één leerling, Andy, frequent gebruikt. De optie 'dy/dx' is voor Andy een standaardprocedure om de helling in één punt te berekenen. Otto gebruikt de rekenmachine-optie 'tangent'. Hij zegt deze optie geleerd te hebben van zijn bijlesdocent. Hij weet echter in interview 2 niet hoe hij uit de formule van de raaklijn de momentane snelheid kan aflezen. In interview 4 lukt hem dat wel (figuur 7.1). In interview 4 noemen of gebruiken drie andere leerlingen, namelijk Bob, Nico, en Piet, voor het eerst ook rekenmachine-opties.

GR → tangent (40) → −0,444x + 35,56

RC = −0,444 · 1000 = 444,44 l/m

Figuur 7.1 Otto's berekening van de uitstroomsnelheid bij de opdracht Watertanks-*b* (I-4)

De *grafiek van de afgeleide* (procedure 6) wordt in de interviews 2 en 4 door respectievelijk drie en vijf leerlingen gebruikt. Deze procedure wordt vooral gebruikt bij de opdracht *Monopolie* waar enkele leerlingen (Andy, Casper, Dorien en Nico) de grafiek van TK′ plotten en het minimum van deze grafiek interpreteren als punt waar de totale kosten het minst toenemen. Bob gebruikt deze procedure ook bij de opdracht *Kogel* in interview 4. Hij controleert of de afgeleide functie $h'(t) = -9{,}8t$ inderdaad de snelheid beschrijft door de grafiek van de afgeleide functie te plotten (figuur 7.2). Bob interpreteert de grafiek van de afgeleide als 'verzameling y-waarden', die steeds groter worden en relateert dat aan de steeds sneller vallende kogel.



Figuur 7.2 Bobs grafiek bij de opdracht *Kogel* in interview 4

Symbolisch differentiëren (procedure 7) wordt in interview 2 gebruikt door acht leerlingen, hoewel maar vier leerlingen de methode accuraat uitvoeren. Veel leerlingen zijn onzeker over het gebruik van het symbolisch differentiëren. In interview 4 is voor dezelfde acht leerlingen het symbolisch differentiëren de meest gebruikte methode geworden. Alleen Elly gebruikt het symbolisch differentiëren helemaal niet, terwijl Andy pas in de laatste opdracht van interview 4 een afgeleide berekent.

Het *aflezen van de richtingscoëfficiënt* (procedure 8) wordt in interview 2 bij de opdracht *Watertanks-a* door één leerling toegepast en in interview 4 door vier leerlingen.

Natuurkundeformules (procedure 9) worden in de interviews 2 en 4 gebruikt om de valsnelheid van een kogel te berekenen. In interview 2 noemen vijf leerlingen dat ze de opdracht *Kogel* met behulp van natuurkundeformules kunnen uitvoeren. Nico en Piet spreken over (onjuiste) formules zoals $\frac{1}{2} \times zwaartekracht \times massa$ (Nico, I-2) en $x = \frac{1}{2} vt^2$ (Piet, I-2). Elly wil de formule $v = \frac{s}{t}$ gebruiken en Maaike kiest de formule $h(t) = \frac{1}{2} gt^2$, maar ze vult waarden voor de tijd t en de hoogte h in en berekent g. Bob berekent in interview 2 de snelheid van de vallende kogel bijna goed door de kinetische energie gelijk te stellen aan de potentiële energie (figuur 7.3).

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$9{,}81 \cdot 0{,}28 = \frac{1}{2} v^2$$

$$V = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}28 \cdot 2} = 5{,}[illegible]5 \text{ m/s}$$

Figuur 7.3 Bobs uitwerking van de opdracht *Kogel* (Bob, I-2)

In interview 2 lost geen enkele leerling de opdracht *Kogel* met natuurkundeformules accuraat op. In interview 4 is het gebruik van natuur-

kundeformules toegenomen en de accuratesse verbeterd. In paragraaf 7.3.3 wordt beschreven in hoeverre leerlingen de gebruikte natuurkundeformules relateren aan andere procedures.
Economieformules (procedure 10) kunnen gebruikt worden bij de opdracht *Monopolie* die opgenomen is in de interviews 1, 2 en 4. Alleen Bob, Casper, Elly en Nico volgen het vak economie. Het patroon bij het oplossen van deze opdracht is dat leerlingen in interview 1, dus voor de introductie van de differentiaalrekening, kiezen voor grafische procedures, in interview 2 grafische en symbolische procedures combineren, terwijl in interview 4 de symbolische procedures het meest gebruikt worden, soms samen met grafische weergave van de afgeleide functie. Alleen Casper gebruikt in interview 4 economieformules. In paragraaf 7.3.3 wordt nader ingegaan op relaties tussen wiskundeprocedures en economieformules

7.3.2 De breedte van het repertoire

Het beschikken over een breed repertoire wordt zichtbaar als een leerling bij een opdracht meerdere procedures gebruikt of noemt en als de leerling in één interview een grote variatie aan procedures gebruikt. Tabel 7.6 geeft een overzicht van het aantal verschillende procedures dat door leerlingen in de opeenvolgende interviews is gebruikt.

Tabel 7.6 Aantallen verschillende procedures

	Interview 1									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Aantal verschillende procedures	5	2	2	2	2	1	0	2	3	1

	Interview 2									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Aantal verschillende procedures	4	5	5	4	3	4	4	4	3	4

	Interview 3									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Aantal verschillende procedures	6	7	5	3	4	3	4	6	5	4

	Interview 4									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Aantal verschillende procedures	7	7	7	5	3	4	5	7	4	4

Van interview 1 naar 2 neemt bij acht van de tien leerlingen de breedte van het repertoire toe. Dit komt vooral doordat leerlingen procedures toepassen die in de periode tussen interview 1 en 2 in de wiskundeles zijn behandeld. Wel blijken de in de les behandelde procedures in het daarop volgende interview voor veel leerlingen nog geen sterk onderdeel van het repertoire te zijn. Het symbolisch differentiëren, dat bij de introductie van de differentiaalrekening is behandeld, wordt door twee leerlingen in het geheel niet genoemd en door vier andere leerlingen in geen enkele opdracht accuraat uitgevoerd. Andere procedures die bij de introductie van de differentiaalrekening in de lessen zijn toegelicht en geoefend, worden weinig ingezet.
Vergelijking van de interviews 2 en 4 maakt duidelijk dat voor zeven leerlingen de breedte van het repertoire is toegenomen. Bij drie van deze leerlingen (Bob, Casper en Nico) wordt de verbreding van het repertoire zichtbaar doordat ze meer controlemethoden noemen, zonder daarbij de betreffende procedure uit te voeren. Maar er zijn ook leerlingen (Dorien, Otto, Piet) bij wie het repertoire

zich na interview 2 nauwelijks verbreedt en die vasthouden aan dezelfde procedures.

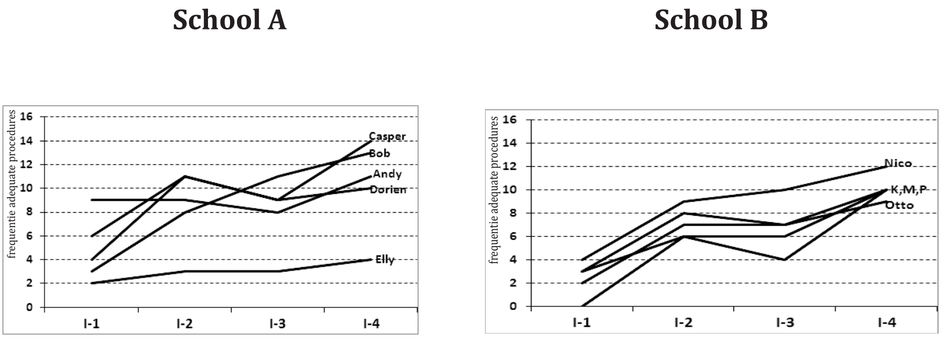
Uit tabel 7.6 blijkt dat in de opeenvolgende interviews de breedte van het repertoire van de leerlingen gemiddeld genomen toeneemt. In interview 2 gebruiken de leerlingen gemiddeld 4,0 verschillende procedures, terwijl dit aantal in interview 4 is toegenomen tot gemiddeld 5,3 procedures. Deze toename is ook op opdrachtniveau zichtbaar. Bijvoorbeeld bij de opdracht *Watertanks-b* (zie paragraaf 7.2) en *Kogel* (zie bijlage D) noemen en gebruiken veel leerlingen meer procedures.

In tabel 7.7 is weergegeven hoe vaak leerlingen een adequaat gekozen procedure noemen of gebruiken, dus inclusief het herhaald gebruik van eenzelfde procedure bij verschillende opdrachten binnen één interview.

Tabel 7.7 Frequentie van adequaat gekozen procedures

	Interview 1										Interview 2										Interview 3										Interview 4									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Frequentie adequaat gekozen procedures	9	3	6	4	2	2	0	4	3	4	9	8	11	11	3	7	6	9	8	6	8	11	9	9	5	7	5	10	7	6	11	13	14	10	3	10	10	12	9	10

De gegevens uit tabel 7.7 zijn in figuur 7.4 ook grafisch weergegeven. De gegevens van beide scholen zijn in verschillende grafieken weergegeven.



Figuur 7.4 Frequentie van adequate procedures in de opeenvolgende interviews

In tabel 7.7 en figuur 7.4 is zichtbaar dat bij negen van de tien leerlingen de frequentie van adequaat gekozen procedures van interview 1 naar 2 toeneemt. Dit komt vooral door het herhaald gebruik van in de les behandelde procedures zoals: de raaklijnmethode, het symbolisch differentiëren, de klein-intervalmethode of de rekenmachine-opties. Een uitzondering is Andy. In interview 1 kiest hij veel adequate procedures. Het aantal adequaat gekozen procedures van Andy blijft constant, hoewel hij deels andere procedures toepast.

De frequentie van adequaat gekozen procedures neemt bij zeven van de tien leerlingen van interview 2 naar 3 niet verder toe. Dit effect kan veroorzaakt zijn doordat het onderwerp differentiaalrekening in de periode tussen interview 2 en 3 weinig aandacht kreeg in de les. Maar de andere samenstelling van de opdrachten in het interview kan ook van invloed zijn op de daling van interview 2 naar 3.

Bij acht van de tien leerlingen neemt in interview 4 de frequentie van adequaat gekozen procedures toe in vergelijking met identieke opdrachten in interview 2. In interview 2 komt in de werkwijze van veel leerlingen naar voren dat ze zoekend en stapsgewijs een procedure uitvoeren, terwijl ze in interview 4 verschillende procedures vloeiender en accurater uitvoeren en bij verschillende opdrachten gebruiken. De gemiddelde frequentie van het aantal adequaat gekozen procedures is van interview 2 tot interview 4 toegenomen van 7,8 tot 10,2.

Leerlingen van school A kiezen in alle interviews gemiddeld vaker adequate procedures dan leerlingen van school B. De leerlingen van school A gebruiken meer verschillende procedures en herhalen deze bij verschillende opdrachten. In hoofdstuk 8 wordt hierop ingegaan.

Naast overeenkomsten zijn er ook grote verschillen tussen leerlingen zichtbaar. De frequentie van adequaat gekozen procedures varieert in interview 1 sterk per leerling. Bij Maaike is deze 0 en bij Andy 9. Andy's frequentie van 9 in interview 1 is hoog ten opzichte van de andere leerlingen. Hij pakt in interview 1 meerdere opdrachten met de twee procedures aan, de (klein-)intervalmethode en de raaklijnmethode.

Verschillen tussen leerlingen zijn ook zichtbaar in het verloop van de frequenties van adequaat gekozen procedures. Bij twee leerlingen (Bob en Nico) nemen deze frequenties bij elk interview toe. Bij twee andere leerlingen (Dorien en Otto) is de toename vooral zichtbaar bij de overgang van interview 1 naar 2, terwijl in de daaropvolgende interviews de frequenties gelijk blijven. Bij twee leerlingen (Casper en Maaike) nemen de frequenties toe van interview 1 naar 2, maar is er een afname van interview 2 naar 3, terwijl er in interview 4 weer een toename is. Voor één leerling (Elly) blijven de frequenties van adequate procedures in alle interviews laag.

7.3.3 De samenhang van het repertoire

In deze paragraaf worden relaties tussen procedures beschreven die het meest gelegd zijn. Ook wordt ingegaan op de relaties die leerlingen leggen tussen procedures die behandeld zijn bij wiskunde, natuurkunde en economie.

De relatie tussen de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren

In de resultaten van de opdracht *Watertanks-b* (paragraaf 7.2) wordt zichtbaar dat de leerlingen in de opeenvolgende interviews steeds beter de relatie leggen tussen de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren.

Het noemen van een relatie tussen de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren is zichtbaar in interview 2 bij zes van de tien leerlingen maar vier van deze zes leerlingen zijn hier onzeker over. Bob zegt bijvoorbeeld bij de opdracht *Kogel* in interview 2: "*Nou volgens mij kan ik gewoon, volgens mij moet ik dat doen met een raaklijn* [met de potloodpunt tekent hij een raaklijn], *nou in ieder geval dat principe zeg maar*. *En eh ja volgens mij, bij wiskunde kon je een afgeleide formule doen, alleen wat was dat ook al weer*?" Ook Otto legt steeds een verband tussen de afgeleide en de raaklijn in plaats van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en legt daarmee niet de relatie tussen raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren. Hij zegt bijvoorbeeld: "*Volgens mij moet je gaan differentiëren, de formule van de raaklijn kreeg je met differentiëren*." Dit herhaalt Otto bij drie opdrachten in interview 2.
In interview 4 zijn beide procedures bij zeven van de tien leerlingen sterk aan elkaar gerelateerd. Deze leerlingen merken op dat de afgeleide in een punt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn oplevert en dat beide procedures te gebruiken zijn om de momentane verandering te berekenen of te benaderen. Bob zegt bijvoorbeeld in interview 4: "*Het gaat om de snelheid, dus dan moet ik de richtingscoëfficiënt van dat punt hebben, van de raaklijn zeg maar, en eigenlijk differentiëren denk ik*." Piet, die in interview 2 niet de combinatie van raaklijnmethode en symbolisch differentiëren gebruikte, zegt in interview 4: "*Je moet gewoon in de grafiek een raaklijn tekenen en dan stel je de formule van die lijn op zeg maar, de snelheid*. *Ik kan het ook wel helemaal berekenen trouwens,* [schrijft rc = V'] *de richtingscoëfficiënt is dan de afgeleide*."
Bij zeven van de tien leerlingen is ontwikkeling zichtbaar in de relatie tussen deze twee procedures. In interview 2 leggen de meeste leerlingen deze relatie niet, terwijl in interview 4 zeven leerlingen de raaklijnmethode relateren aan het bepalen van de richtingscoëfficiënt met behulp van de afgeleide. Uitzonderingen zijn Maaike, Elly en Andy. Maaike en Elly spreken alleen over raaklijnen in natuurkundige opdrachten zoals *VT-diagram*, *Steen* of *Tikkerband*, maar niet bij andere opdrachten. Zij combineren de raaklijnmethode niet met symbolisch differentiëren. Andy relateert de raaklijnmethode aan andere procedures maar niet aan het symbolisch differentiëren.

De raaklijnmethode: wiskunde of natuurkunde?
Leerlingen die de raaklijnmethode relateren aan het symbolisch differentiëren verbinden twee procedures die bij verschillende schoolvakken zijn geïntroduceerd. De raaklijnmethode is geïntroduceerd bij natuurkunde in het kinematica-hoofdstuk, het symbolisch differentiëren is geïntroduceerd bij wiskunde. Dit komt ook naar voren in uitspraken van leerlingen. Andy en Bob leggen bijvoorbeeld in interview 1 uit dat ze de raaklijnmethode bij natuurkunde geleerd hebben. In interview 2 is niet bij elke leerling expliciet vast te stellen of de raaklijnmethode als een wiskundige of een natuurkundige

methode wordt opgevat. Karin is daar wel duidelijk over: "*Nou ja, dit heb ik bij natuurkunde gehad, dan moet je zo'n raaklijn trekken*" en "*Natuurkundigen trekken altijd van die rare raaklijnen*." Otto koppelt de raaklijn aan de wiskundige methode differentiëren: "*Als je gaat differentiëren heb je de formule van de raaklijn*."

In interview 3 spreekt Karin opnieuw expliciet over de raaklijn als natuurkundige methode, als ze bij *Watertanks-b* de twee procedures vergelijkt. Ze noemt de afgeleide 'wiskundig' en de raaklijn 'natuurkundig' waarbij ze nog toevoegt: "*Ja die raaklijn, dat mag je nooit zo bij wiskunde doen; dit doe je bij wiskunde exact*." Ook Casper relateert de raaklijnmethode in interview 3 expliciet aan natuurkunde als hij duidelijk maakt: "*We mochten van de natuurkundeleraar altijd alleen als je dit ging doen erlangs en dan mocht hij één punt raken*. […] *Hij moest aan één kant blijven en hij mocht op één punt maar raken*."

In interview 4 wordt de raaklijnmethode door leerlingen niet meer expliciet natuurkundig of wiskundig genoemd. Enkele leerlingen, bijvoorbeeld Karin en Piet, geven aan dat ze het een onnauwkeurige methode vinden en dat ze liever symbolisch differentiëren. Maaike en Elly blijven de methode alleen noemen in natuurkundige opdrachten zonder relaties met differentiëren te leggen.

Wiskundeprocedures en natuurkundeformules

De relatie tussen het symbolisch differentiëren en de natuurkundeformules voor de afgelegde weg $x = \frac{1}{2}at^2$ en voor de snelheid $v = at$ wordt in interview 3 door één leerling, Karin, geëxpliciteerd. Zij legt bij de opdracht *Tikkerband-a* uit dat de afgeleide van de natuurkundeformule voor de afgelegde weg de formule van de snelheid oplevert: "*Je had drie van die formules: $x = \frac{1}{2}at^2$, en dan is v, dat moest je dan differentiëren dat is $v = at$. Alleen ik heb de versnelling niet, dus dat slaat nergens op*." Vier andere leerlingen Bob, Casper, Dorien en Piet noemen in interview 2 of 3 ook dat de afgeleide van de afgelegde weg de snelheidsformule of snelheidsgrafiek oplevert, maar zij brengen deze uitspraak niet in verband met de genoemde natuurkundeformules.

In interview 4 blijkt dat twee leerlingen het verband tussen de natuurkundeformules voor afgelegde weg en snelheid enigszins kunnen verwoorden. Bob doet dat met de volgende uitleg: "*Dit is dan de $\frac{1}{2}at^2$*. [wijst in de formule van de hoogte naar –4,9t] *En de snelheid is g keer t geloof ik. Ja, hier ook de horizontaal afgelegde afstand is een $\frac{1}{2}gt^2$, dat is dan ook logisch dat die afgeleide dan wel weer 9,81 is. Gewoon de versnelling keer de tijd is de snelheid*."

Piet legt in interview 4 uit: "*Die afgeleide is de snelheid, de afgeleide van de snelheid is weer de versnelling dus* […], *als je de snelheid nog een keer zou afleiden, zou er –9,8 uitkomen*, *en dat is de valversnelling de g zeg maar, de zwaartekracht*."

Voor twee leerlingen (Andy en Elly) die wel de formule *v = gt* gebruiken, lijkt het een geïsoleerde procedure. Andy zegt bijvoorbeeld: "*v, ja, g keer t, dat weet*

ik ook niet zeker […] *deze formule is bijna hetzelfde als v is s keer t, of nee ik weet het niet*." Elly schrijft de formule $v = 9{,}8 \times t$ en zegt dat ze deze formule mag gebruiken omdat het over vallen gaat.
Twee andere leerlingen (Casper en Dorien) gebruiken de formule $v = 9{,}8 \cdot t$. Ze herkennen in deze formule ook de constante voor de valversnelling 9,8 m/s^2, maar uit uitspraken en handelingen wordt niet duidelijk of ze de snelheidsformule herkennen als afgeleide van de formule voor de afgelegde weg. Uit het contextdeel van interview 4 blijkt dat het verband tussen deze formules voor Dorien niet vanzelfsprekend is, alhoewel het wel volgens haar genoemd is door de docent: "*De docent van natuurkunde heeft het vast op het bord gezet, die is wel van de formules*."

Kortom, de relatie tussen differentiëren en de formules voor de valbeweging wordt door enkele leerlingen in interview 4 explicieter verwoord dan in interview 2. Maar dit resulteert niet in uitspraken waarin wordt genoemd dat de afgeleide van $x = \frac{1}{2}at^2$ de formule voor de snelheid $v = at$. Wel zijn er enkele leerlingen die noemen dat de afgeleide van de afgelegde weg de snelheidsformule of -grafiek is, en dat de afgeleide van de snelheid de versnelling oplevert.

Wiskundeprocedures en economieformules
Bij het interpreteren van TK′(20) in interview 3 komt bij Bob, Casper en Elly voor het eerst naar voren dat marginale kosten berekend kunnen worden door de totale kosten te differentiëren. Elly kan in dit interview de relatie tussen TK′ en MK niet goed onder woorden brengen. Ze zegt: "*Maximale winst is bij MO = MK, marginale opbrengst is marginale kosten, even kijken hoor, het is lang geleden*. *Is de afgeleide van TK dan gelijk aan MK*? […] *TK is misschien hetzelfde als MO of MK, anders zou ik geen gegevens hebben om het uit te rekenen*."
Bob interpreteert TK′(20) door een vergelijking te maken met een *s*-*t*-grafiek. Hij zegt: "*Dit is denk ik wat je noemt marginale kosten, kosten per product, wat de kosten per product zijn als het aantal producten 20 miljoen is* […]. *Ik kwam erop dat wanneer je een s keer t grafiek hebt, dan is de afgeleide v, dat is in meter per seconde, dus nu hebben we een totale kosten maal afzet, dus dat is dan kosten per afzet en dat is dus kosten per product.*" Door de relatie te leggen met de *s*-*t*-grafiek bedenkt Bob de betekenis van TK′. Zijn formulering 'kosten per product' is niet correct, aangezien het om de toename van de kosten gaat. Als gevraagd wordt naar maximale winst noemt Bob direct de economieformule MO = MK en stelt hij de afgeleiden van TO en TK aan elkaar gelijk. In interview 4 noemt Bob echter geen economische begrippen meer bij de opdracht *Monopolie*. Dit kan er op duiden dat Bob het symbolisch differentiëren en de marginale kosten en opbrengsten minder goed aan elkaar kan relateren, maar dit kan ook een gevolg zijn van de vraagstelling. In tegenstelling tot opdrachten in economieboeken, waarin veelal gevraagd wordt naar de maximale winst,

wordt in deze opdracht gevraagd naar de productieomvang wanneer kosten en opbrengsten even snel toenemen.
Casper verbindt de wiskundige procedures en economieformules het sterkst aan elkaar. In interview 3 zegt hij bijvoorbeeld: "*Als dat apostrof ding er achter staat heeft het met de marginale kosten te maken. Dat is de afgeleide van de totale kosten. De marginale kosten is als je een product meer maakt, hoeveel dat totaal meer kost*." In interview 4 zegt Casper: "*De afgeleide van die* [wijst naar TO], *nou ik doe eigenlijk gewoon even de marginale opbrengst* [schrijft de afgeleide van TO op] *die moet gelijk zijn aan de marginale kosten*."
Nico, de enige leerling van school B die economie gekozen heeft, spreekt in geen enkel interview over het begrip marginale kosten of opbrengsten.
Van de vier leerlingen die economie in hun vrije deel hebben gekozen relateren vooral Casper en in mindere mate Bob bij economie geleerde procedures aan het concept afgeleide. Elly, die al in interview 1 het begrip marginale kosten gebruikt, kan de genoemde relatie niet goed verwoorden, terwijl Nico in het geheel geen relaties legt tussen economieformules en wiskunde.

Andere relaties tussen procedures

Andere relaties tussen procedures komen maar bij één of twee leerlingen voor. Andy gebruikt steeds de rekenmachine-optie dy/dx gecombineerd met de raaklijnmethode en soms de klein-intervalmethode om een momentane verandering te berekenen. Tijdens interview 3 kan Andy de samenhang tussen deze drie procedures goed verwoorden. Hij zegt bijvoorbeeld: "*Ja ik kan* […] *bijvoorbeeld t = 40,001 nemen en t = 40 nemen*. […] *Dat doet de rekenmachine ook* [bedoeld wordt de rekenmachine-optie dy/dx], *maar die doet het heel klein, die doet het met nog minder* [schrijft op 40,000001]." Het symbolisch differentiëren lijkt voor Andy geïsoleerd van andere procedures.
Maaike relateert in interview 4 symbolisch differentiëren en de klein-intervalmethode. Ze is in het begin van het interview nog onzeker over de combinatie van deze procedures. Ze vraagt zich bij de opdracht *Watertanks-b* af: "*Het is toch niet zo dat als je die differentieert dat daar de snelheid uitkomt*?" en vervolgens: "*Ik weet misschien wel iets denk ik, als je er nou één minuutje naast gaat zitten of één seconde*." *Een klein stapje ernaast maar dat is niet precies*." In deze opdracht voert ze in eerste instantie alleen de klein-intervalmethode uit, maar als ze met het volgende onderdeel bezig is realiseert ze zich dat de klein-intervalmethode en het symbolisch differentiëren aan elkaar gerelateerd zijn. Vanaf dat moment in interview 4 combineert ze de beide procedures.

7.3.4 Overeenkomsten en verschillen in de individuele ontwikkeling

Allereerst beschrijf ik in deze paragraaf de overeenkomsten in de ontwikkeling van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide. Vervolgens zal ik nagaan in hoeverre de ontwikkeling van de individuele leerlingen van het gemeenschappelijke patroon afwijkt en zal ik typen leerlingen karakteriseren.

Overeenkomsten in ontwikkeling

In *interview 1* gebruiken leerlingen weinig adequate procedures. Vaak zijn deze gebaseerd op oppervlakkige kenmerken van de opdrachten. Ook de variatie in de gebruikte procedures is beperkt. Veel procedures zijn nog niet behandeld omdat bij wiskunde de differentiaalrekening nog niet is geïntroduceerd. Wel maken twee leerlingen van school A opdrachten met de raaklijnmethode die zij bij natuurkunde geleerd hebben.

Na de eerste introductie van de differentiaalrekening is in *interview 2* de breedte van het repertoire bij de meeste leerlingen toegenomen ten opzichte van interview 1. De voorkeur gaat uit naar het gebruik van de raaklijnmethode en het eveneens behandelde symbolisch differentiëren. Echter symbolisch differentiëren wordt vaak nog niet accuraat uitgevoerd en de meeste leerlingen zijn onzeker over de relatie tussen raaklijnmethode en het differentiëren. De nu en dan gebruikte natuurkundeformules hebben geen relatie met andere procedures en worden niet accuraat uitgevoerd. Economieformules worden in interview 2 niet genoemd of gebruikt. De samenhang tussen de gebruikte procedures in interview 2 is niet sterk.

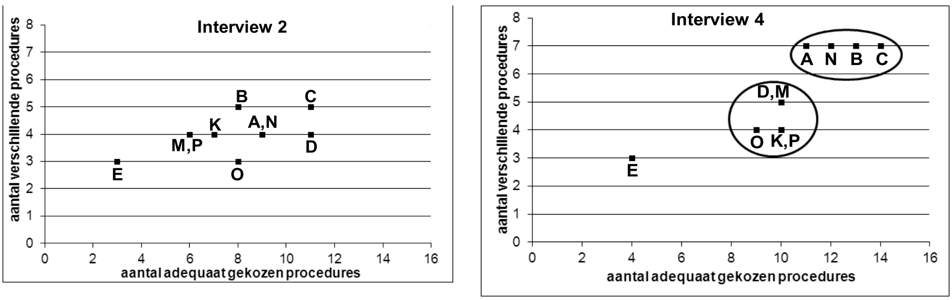
In *interview 3* neemt de breedte van het repertoire ten opzichte van interview 2 niet toe. De combinatie raaklijnmethode – symbolisch differentiëren wordt het meest gebruikt in opdrachten waar gevraagd wordt naar een momentane verandering. Zeven leerlingen combineren deze twee procedures en laten zien dat de samenhang tussen beide procedures nu wel aanwezig is. Zes van deze zeven leerlingen gebruiken alleen deze twee procedures; het gebruik van bijvoorbeeld de klein-intervalmethode of rekenmachine-opties is beperkt. Van de andere drie leerlingen beperken twee zich tot een enkele procedure, terwijl één leerling een andere combinatie van procedures gebruikt. Relaties tussen wiskundeprocedures en natuurkundeformules worden in interview 3 nauwelijks gelegd. Die samenhang is zwak. Bij de economie-opdracht verwoorden twee van de vier economie-leerlingen het verband tussen de afgeleide en de marginale kosten, maar bij één van deze twee zijn de uitspraken niet geheel juist.

In *interview 4* zijn bij dezelfde zeven leerlingen als in interview 3 het symbolisch differentiëren en de raaklijnmethode nog sterker aan elkaar gerelateerd. De raaklijnmethode wordt door enkele leerlingen in interview 4 minder vaak uitgevoerd omdat ze deze procedure niet als een exacte werkwijze beschouwen. Verder breiden enkele van deze zeven leerlingen hun repertoire verder uit door naast deze twee procedures ook andere procedures te noemen of te gebruiken, zoals een rekenmachine-optie en het gebruik van de grafiek van de afgeleide functie.

Drie leerlingen combineren het symbolisch differentiëren niet met de raaklijnmethode. Bij twee van deze leerlingen neemt de breedte van het repertoire toe met andere combinaties van procedures. Natuurkundeformules worden in interview 4 accurater gebruikt, maar blijven voor de meeste leerlingen geïsoleerd van procedures die bij wiskunde behandeld zijn. Drie leerlingen expliciteren enigszins de relatie tussen het differentiëren en de formules voor de valbeweging. Bij de economie-opdracht noemt één van de vier economie-leerlingen het verband tussen afgeleide en marginale kosten.

Verschillen in ontwikkeling

Om gemeenschappelijke patronen in de ontwikkeling zichtbaar te maken zijn de leerlingen gegroepeerd op basis van de breedte van hun repertoire (zie tabel 7.6) en de frequentie van adequaat gekozen procedures (zie tabel 7.7). In figuur 7.5 zijn deze gegevens tegen elkaar uitgezet voor de interviews 2 en 4. Op basis van de grafiek van interview 4 worden drie groepen onderscheiden.



Figuur 7.5 Aantal verschillende procedures uitgezet tegen frequentie van adequaat gekozen procedures in de interviews 2 en 4

Leerlingen met een breed, samenhangend repertoire: Andy, Bob, Casper en Nico ontwikkelen in de loop van het onderzoek een breed en samenhangend repertoire. In interview 4 gebruiken zij meerdere procedures en zetten deze bij verschillende opdrachten in. Zij relateren in de interviews 3 en 4 wiskundeprocedures en procedures uit andere schoolvakken steeds beter aan elkaar. Daarin ontwikkelen zij zich verder dan de andere leerlingen. Binnen deze groep zijn verschillen zichtbaar in ontwikkeling. Casper maakt bijvoorbeeld de grootste sprong in zijn ontwikkeling van interview 1 naar 2, terwijl de andere drie deze sprong maken na interview 2. Nico en Andy kenmerken zich door een werkwijze waarin ze switchen tussen grafische en numerieke procedures om antwoorden te berekenen of te controleren. Ze kiezen beiden vaak procedures die voorstelbaar zijn in de beschreven situatie, zoals intervalmethoden en grafische procedures, en relatief minder voor symbolisch differentiëren.

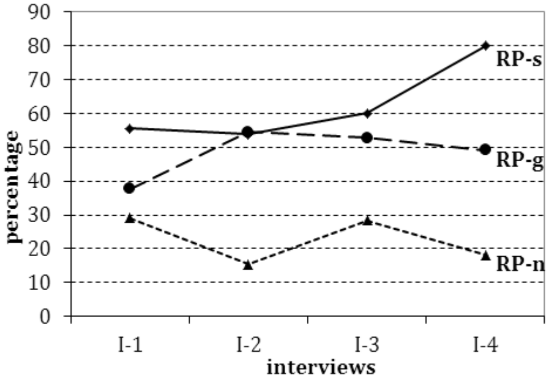
Leerlingen met een smal, samenhangend repertoire: Dorien, Karin, Maaike, Otto en Piet gebruiken in de interviews 2 en 4 in verhouding een smal repertoire van maximaal vijf verschillende procedures. De gebruikte procedures worden door deze leerlingen in de loop van de interviews beter aan elkaar gerelateerd. Bij deze leerlingen wordt het symbolisch differentiëren de centrale procedure. Relaties met procedures van andere schoolvakken zijn zwak. Ook binnen deze groep verschilt de snelheid van ontwikkeling. Dorien maakt bijvoorbeeld een sprong in haar ontwikkeling tussen interview 1 en 2, terwijl Maaike en Piet deze sprong maken van interview 3 naar 4.
Leerlingen met een smal, onsamenhangend repertoire: Elly zoekt vaak naar procedures gebaseerd op oppervlaktekenmerken van een opdracht. Ze gebruikt in geen van de interviews het symbolisch differentiëren, hoewel ze deze techniek wel kent en kan uitvoeren. Er is bij haar nauwelijks een toename te constateren in de breedte en de samenhang van het repertoire. In de interviews blijkt ze vaak betekenisloos gememoriseerde procedures uit te voeren.

7.4 Representaties en aspecten van het concept afgeleide

Het gebruik van representaties en het noemen van aspecten van het concept afgeleide in verschillende situaties wordt aan de hand van twee indicatoren (zie tabel 3.2) geanalyseerd. De eerste indicator is het gebruik van representaties (7.4.1). De tweede indicator is het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide (7.4.2).

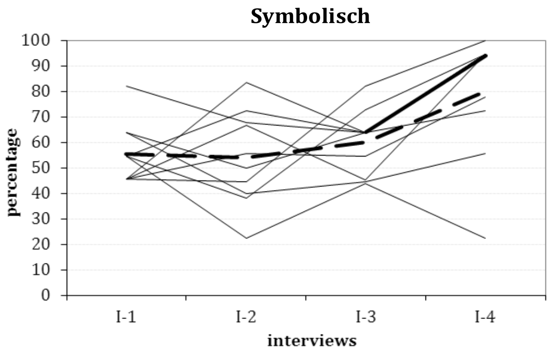
7.4.1 Het gebruik van representaties

Om de verschillende interviews met elkaar te vergelijken is voor elk van de interviews een *representatiepercentage* berekend. Dat geeft aan in welke mate de leerlingen een bepaalde representatie gebruiken ten opzichte van een vooraf vastgestelde maximumscore (zie paragraaf 4.6). In figuur 7.6 is de ontwikkeling van de gemiddelde representatiepercentages in de opeenvolgende interviews weergegeven.
In *interview 1* proberen meerdere leerlingen berekeningen uit te voeren met de gegeven formules en wordt de symbolische representatie in verhouding het meest gebruikt.
In de grafiek is zichtbaar dat in *interview 2* na de introductie van de differentiaalrekening het gebruik van de grafische representatie toeneemt. Leerlingen gebruiken in berekenopdrachten vaak de grafische raaklijnmethode en in redeneeropdrachten meer grafische aspecten, zoals ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’ of ‘helling’. De introductie van de differentiaalrekening vertaalt zich in interview 2 nog niet in een hoge waarde van het representatiepercentage van de symbolische representatie.

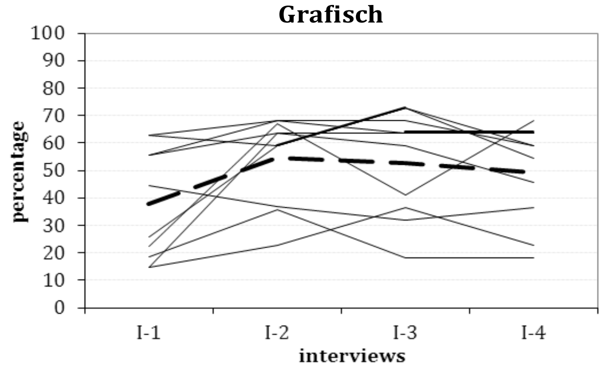


Figuur 7.6 Het gemiddelde representatiepercentage (RP) voor de symbolische, grafische en numerieke representatie in de opeenvolgende interviews

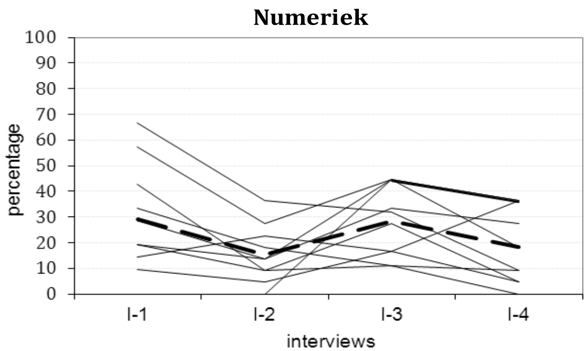
In *interview 3* leggen zeven van de tien leerlingen een sterkere relatie tussen de grafische en de symbolische procedures en aspecten. Daardoor neemt het gebruik van de symbolische representatie toe, terwijl het gebruik van de grafische representatie gelijk blijft.
In *interview 4* neemt het gebruik van de symbolische representatie nog verder toe. Bij zeven van de tien leerlingen is het gebruik van functies en afgeleide functies toegenomen. Het gebruik van de grafische representatie neemt licht af en het gebruik van de numerieke representatie blijft laag. Dit kan verklaard worden uit het feit dat enkele leerlingen, zoals Casper, Dorien, Karin, Otto en Piet, overtuigd zijn van hun symbolische berekening en numerieke en grafische procedures wel noemen maar vaak niet uitvoeren.
Om een indicatie te geven in hoeverre individuele leerlingen in hun ontwikkeling het gemiddelde verloop (van de tien leerlingen) volgen of daar juist van afwijken zijn in figuur 7.7-a, b en c de resultaten van de tien leerlingen als bundel grafieken weergegeven.



Figuur 7.7-a Gebruik van de symbolische representatie (de onderbroken lijn is het gemiddelde RP-s)



Figuur 7.7-b Gebruik van de grafische representatie (de onderbroken lijn is het gemiddelde RP-g)



Figuur 7.7-c Gebruik van de numerieke representatie (de onderbroken lijn is het gemiddelde RP-n)

In figuur 7.7-a is zichtbaar dat de waarden van RP-s in interview 4 verder uiteen gaan lopen. Zes van de tien leerlingen komen uit op een hoog percentage voor de symbolische representatie. Twee leerlingen blijven in alle interviews de symbolische representatie weinig gebruiken; dit betreft vooral Elly en in mindere mate Andy.

Het gebruik van de grafische representatie is bij vijf leerlingen in interview 1 laag, ongeveer 20%. Bij drie van deze vijf leerlingen (Casper, Nico en Karin) treedt een sterke stijging op in de waarden van RP-g van interview 1 naar 2, terwijl bij de andere twee (Maaike en Elly) deze waarden laag blijven en bij alle interviews onder het gemiddelde blijven. Bij drie leerlingen (Andy, Dorien en Otto) is de waarde van het RP-g in alle interviews bovengemiddeld.

Het gemiddelde van RP-n ligt alle interviews onder de 30%. Bij de numerieke representatie springt vooral de sterke daling van één leerling in het oog (Casper). In interview 1 gebruikte Casper veelvuldig de tabeloptie van zijn grafische rekenmachine. In de loop van de interviews verschuift zijn werkwijze naar symbolische en in mindere mate naar grafische procedures. In interview 4 is het gemiddelde van RP-n 18%. Nico, Maaike en Andy wijken met een percentage van 36% het meest van het gemiddelde af. Voor Nico is dat het gevolg van het feit dat hij de afgeleide waarde in meerdere opdrachten interpreteert als 'toename van *y* als *x* met één toeneemt'. Dit is gecodeerd als een numerieke representatie. Andy en Maaike gebruiken bij meerdere opdrachten numerieke procedures zoals de (klein)-interval methode, terwijl ze weinig gebruik maken van de symbolische (Andy) of grafische (Maaike) representatie.

7.4.2. Aspecten van het concept afgeleide

De aspecten die door leerlingen vaak genoemd worden zijn 'steilheid', 'richtingscoëfficiënt', 'helling', 'snelheid', 'toename', en 'het delen van delta y door delta x'. In tabel 7.8 is weergegeven hoe vaak bepaalde aspecten door elke leerling genoemd worden in de verschillende interviews. Daarbij is per onderdeel van een opdracht een aspect maximaal één keer geteld. Andere aspecten die een enkele keer voorkomen, zoals 'verandering' of 'hellingfunctie', zijn niet opgenomen in tabel 7.8.

In tabel 7.8 is zichtbaar dat in *interview 1* weinig aspecten worden genoemd. De aspecten die genoemd worden zijn met name 'steilheid' en 'snelheid'. Het aspect 'steilheid' wordt door enkele leerlingen van school A en school B genoemd, hoewel het alleen op school A expliciet is behandeld bij de introductie van de kinematica. Het aspect 'snelheid' wordt alleen door leerlingen van school A genoemd. Dit gebeurt vooral in relatie met het aspect 'steilheid', als deze leerlingen verwoorden dat de steilheid van een afstand-tijd-grafiek informatie geeft over de snelheid van een voorwerp.

Voor drie leerlingen, allen van school A, fungeert het aspect 'snelheid' als een brug tussen verschillende opdrachten. Dit blijkt uit uitspraken zoals "*dit hebben we bij andere sommen ook gehad, wanneer de snelheid gelijk is*" (Andy, I-1), of "*krijgen we dit weer, dat je de snelheid op één punt moet weten, en niet de gemiddelde snelheid*" (Dorien, I-1). Deze drie leerlingen kiezen bij verschillende opdrachten voor dezelfde procedure waarbij ze noemen dat het in deze opdrachten om hetzelfde aspect gaat.

Het aspect 'richtingscoëfficiënt', dat wel is behandeld, wordt in het spreken over de opdrachten in interview 1 niet gebruikt.

Tabel 7.8 Het aantal door de leerling genoemde aspecten

	Interview 1										Interview 2										Interview 3										Interview 4									
	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P	A	B	C	D	E	K	M	N	O	P
Steil/steilheid	1	1			2	1	1		2	1	1	4	1	3		1		1	1			4	1	4	1	1	1	1	1		1	4	1	1				1		
Helling																1	1	1										1									2			
Richtingscoëfficiënt												1	4					4	3	2	2	1				2		2	1	3	1	2	2		2				6	2
Snelheid	1	1		2	1							2	3	3		2		2	2	3		1		3		3	1	1	3	5	1	2	2	3	1	2	1	1	1	5
Toename (/eenheid)			2											2			1	1			1		1					1		1		1	1	1		1	1	4	1	1
Delta y / delta x													1															1	3	1	1		1	2					1	1
Aantal verschillende aspecten per leerling	2	2	1	1	2	1	1	0	1	1	1	3	4	3	0	3	2	5	3	2	2	3	2	2	1	3	2	6	4	4	4	4	5	4	2	2	3	3	4	4
	gem = 1,2										gem = 2,6										gem = 2,9										gem = 3,5									
Totaal aantal aspecten per leerling	2	2	2	2	3	1	1	0	2	1	1	7	9	8	0	4	2	9	6	5	3	6	2	7	1	6	2	7	8	10	4	9	7	7	3	3	4	6	9	9
	Totaal 16										Totaal 51										totaal 52										totaal 61									

In *interview 2* na de introductie van de differentiaalrekening gebruiken en noemen leerlingen in hun redenering bij meer opdrachten aspecten van het concept afgeleide dan in interview 1. De frequentie van het totaal aantal genoemde aspecten stijgt van 16 naar 51. Ook de variatie van genoemde aspecten wordt groter: het gemiddeld aantal verschillende aspecten per leerling neemt toe van 1,2 naar 2,6.

Twee leerlingen (Bob en Dorien) gebruiken het aspect 'steilheid' vaker in hun redeneringen, terwijl vier leerlingen (Casper, Nico, Otto en Piet) vooral het aspect 'richtingscoëfficiënt' gebruiken. Zeven leerlingen spreken meerdere keren over het aspect 'snelheid'.

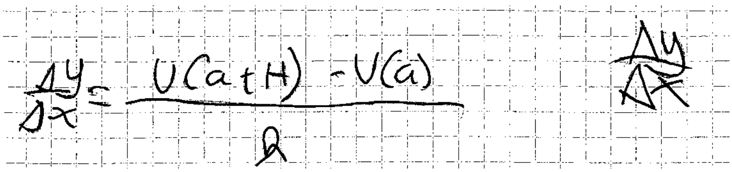
Dit laatste aspect gaat een grotere rol spelen in zowel bereken- als redeneeropdrachten. Het wordt door de leerlingen op verschillende manieren gebruikt. In de eerste plaats wordt door zes leerlingen (Bob, Dorien, Karin, Nico, Otto en Piet) in algemene zin opgemerkt dat de afgeleide de snelheid oplevert. Dit gebeurt bij opdrachten waar het gaat om een momentane snelheid. In de tweede plaats gebruiken Bob en Casper (beiden school A) het woord 'snelheid' als ze zeggen dat de afgeleide functie de snelheidsformule of snelheidsgrafiek oplevert. In de derde plaats verwoorden Karin, Otto en Piet (allen van school B) bij de uitleg over snelheid, het verband tussen *afgelegde weg, snelheid* en *versnelling*.

Het aspect 'helling' wordt door drie leerlingen van school B één keer gebruikt. Dit aspect van het concept afgeleide wordt door leerlingen van school A geen enkele maal genoemd. Daarnaast zijn er drie leerlingen die het aspect 'toename' gebruiken.

Uit de casusbeschrijvingen in hoofdstuk 6 blijkt dat leerlingen die in interview 2 meerdere aspecten noemen deze vaak nog niet goed aan elkaar kunnen relateren. Door de meeste leerlingen wordt één aspect gebruikt in het redeneren over een opdracht. Enkele leerlingen relateren wel aspecten aan elkaar, zoals ‘steilheid’ en ‘snelheid’ (Bob, Dorien en Piet) of ‘richtingscoëfficiënt’ en ‘snelheid’ (Casper en Nico). Maar in interview 2 komen ook nog veel niet accurate uitspraken voor, zoals: “*Ik denk dat de snelheid gelijk is want de snelheid is zeg maar de raaklijn van een punt*” (Bob), “*hier bepaal je de afgeleide dus de richtingscoëfficiënt van hoe snel je dan remt per meter*”(Casper), “*als je gaat differentiëren krijg je de formule voor de raaklijn, dat komt volgens mij overeen met de snelheid, dacht ik*?”(Otto) en “*dat was ook een rijtje, afgeleide van versnelling was snelheid en afgeleide van snelheid was afstand of zoiets*” (Piet).

Zeven van de tien leerlingen noemen in dit interview expliciet dat ze bepaalde opdrachten in het interview met dezelfde procedure(s) kunnen oplossen. De uitspraken hierover zijn vooral gebaseerd op de aspecten ‘steilheid’ (Andy, Bob, Dorien, Nico), ‘richtingscoëfficiënt’ (Nico) en ‘snelheid’ (Karin, Otto). Uitspraken die dit illustreren zijn: “*Ik had weer net als bij de vorige opdracht een raaklijn kunnen tekenen*” (Andy), “*hier geldt hetzelfde verhaal, als je de afgeleide bepaalt, heb je de richtingscoëfficiënt*” (Nico), “*het gaat er weer om dat ik de snelheid moet uitrekenen dus probeer ik de optie ‘tangent’*” (Otto).

In *interview 3* wordt ongeveer hetzelfde aantal aspecten genoemd als in interview 2. Ook worden dezelfde aspecten ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’, ‘snelheid’ en ‘toename’ door leerlingen gebruikt. Voor Bob en Dorien blijft het aspect ‘steilheid’ centraal staan, terwijl Piet in dit interview vaak redeneert over ‘snelheid’ in combinatie met de ‘richtingscoëfficiënt’. Otto en in mindere mate Nico en Piet noemen in dit interview dat het in één of meer opdrachten gaat om ‘het delen van delta y door delta x’. Otto verwoordt dit aspect bij de opdracht *Benzine* als hij zegt: “*Dat is precies, dat is met delta y* [schrijft op het blaadje $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (zie figuur 7.8)] *dat had je met al die andere dingen ook kunnen gebruiken, dat is delta y delen door delta x*.”



Figuur 7.8 Aantekening van Otto bij de opdracht *Benzine* (Otto, I-3)

In dit interview leggen negen leerlingen relaties tussen verschillende opdrachten. De aspecten ‘steilheid’ en ‘snelheid’ vervullen voor veel leerlingen een brugfunctie tussen opdrachten. Maar dit geldt, nu ook voor het aspect ‘deling van delta y door delta x’, zoals uit bovenstaande uitspraak van Otto blijkt.

In *interview 4* worden weer dezelfde aspecten genoemd als in de twee voorgaande interviews. Er zijn wel meer leerlingen die nu het aspect ‘toename’ noemen. Ten opzichte van eerdere interviews valt ook op dat enkele leerlingen een voorkeur krijgen of houden voor het gebruik van één aspect in hun redeneringen. Dit betreft Bob die vooral steilheid blijft noemen, Otto die zes keer de richtingscoëfficiënt noemt, Piet die vooral in termen van snelheid blijft redeneren en Nico die in dit interview vier keer over toenames redeneert.

Voor Nico is het noemen van toenames een verschuiving ten opzichte van dezelfde opdrachten in interview 2. Hij geeft aan dat de afgeleide overeenkomt met de waarde waarmee y toeneemt als x één eenheid groter wordt. Dit blijkt bijvoorbeeld uit een uitspraak bij de opdracht *Kogel* waar Nico zegt: "*De snelheid op een punt* [...] *dat is hoeveel meter hij op dit moment naar beneden gaat als er één t voorbij zou gaan*. *Dus dat lijkt me weer de afgeleide*." Nico is de enige die met behulp van het aspect 'toename' een accurate uitleg geeft van de betekenis van de uitdrukking $R''(v) > 0$ in de opdracht *Remweg*. Omdat Nico ook economie in zijn pakket heeft, vindt deze uitleg mogelijk zijn oorsprong in de economische interpretatie van afgeleide als 'toename per product'.

Het aspect 'het delen van delta y door delta x' wordt in interview 4 door Dorien gebruikt. Net als bij Otto in interview 3 fungeert dit aspect als een brug tussen verschillende opdrachten. De notatie van een differentiequotiënt kan als aspect fungeren, waardoor leerlingen verschillende situaties aan elkaar relateren. Dat blijkt ook uit een uitspraak van Karin in het contextdeel van interview 4 als ze zegt: "*In het boek staat* $A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ (dit betreft het hoofdstuk over radioactiviteit, GR)*, en dan zegt hij* [docent G]: *'zien jullie wel dat dit de afgeleide is?' En dat is dus de link die niemand in de klas had gelegd: Dat delta N gedeeld door delta t eigenlijk N accent is*. *Dat moet ons wel verteld worden, want daar had niemand aan gedacht*."

7.4.3 Overeenkomsten en verschillen in het gebruik van representaties en aspecten

Ook in de ontwikkeling van het gebruik van representaties en aspecten zijn overeenkomsten en verschillen zichtbaar (zie figuur 7.7-a, b, c en tabel 7.8). In het eerste deel van deze paragraaf worden de overeenkomsten beschreven. De afwijkingen van individuele leerlingen van dit patroon worden beschreven in het tweede deel van deze paragraaf.

Overeenkomsten in ontwikkeling

Omdat leerlingen berekeningen uitvoeren met gegeven formules wordt in *interview 1* de symbolische representatie het meest gebruikt. Leerlingen noemen weinig aspecten van het concept afgeleide. Aspecten die genoemd worden zijn 'steilheid' en daarnaast op school A 'snelheid'.

In *interview 2* is ten opzichte van interview 1 vooral een toename in het gebruik van de grafische representatie en het noemen van grafische aspecten waar te nemen. Bij de symbolische representatie is in dit interview geen toename ten opzichte van interview 1 waar te nemen, hoewel daar in het voorafgaand onderwijs juist aandacht aan is besteed. Daarnaast wordt vaak het aspect ‘snelheid’ genoemd en in verband gebracht met differentiëren. Er is een grotere variatie in genoemde aspecten dan in interview 1 (zie tabel 7.8). Uit uitspraken van leerlingen blijkt dat zij aspecten van het concept afgeleide niet of nauwelijks aan elkaar relateren.

In *interview 3* gebruiken leerlingen meer dan in interview 2 de symbolische representatie, terwijl het gebruik van de grafische representatie gelijk blijft. Grafische aspecten als ‘steilheid’ en ‘richtingscoëfficiënt’ worden nog steeds het meest gebruikt. Drie leerlingen leggen het verband tussen afgelegde weg, snelheid en versnelling en gebruiken daarbij dat de afgeleide van een functie de snelheid oplevert. Ook nu neemt de variatie in de genoemde aspecten toe: het gemiddeld aantal verschillende aspecten neemt toe tot 2,9 (tabel 7.8).

In *interview 4* is ten opzichte van interview 3 het gebruik van de symbolische representatie toegenomen, terwijl het gebruik van de grafische representatie ongeveer gelijk blijft. De numerieke representatie wordt in dit interview nog minder gebruikt dan in eerdere interviews. Veel leerlingen relateren in dit interview meerdere aspecten van het concept afgeleide aan elkaar zoals ‘snelheid’ en ‘steilheid’, maar nu ook het ‘delen van twee verschillen’ en de ‘toename per eenheid’. Het gemiddeld aantal verschillende aspecten is in interview 4 toegenomen tot 3,5.

Verschillen in ontwikkeling

De individuele variatie in de ontwikkeling van leerlingen is ook in het gebruik van aspecten zichtbaar. Om dit te beschrijven worden leerlingen gegroepeerd op basis van aspecten die veel door hen genoemd worden (zie tabel 7.8 en de casusbeschrijvingen in hoofdstuk 6).

Leerlingen die vaak het aspect ‘snelheid’ noemen: Karin en Piet gebruiken in hun uitspraken vooral het aspect ‘snelheid’. Piet noemt dit vaker dan Karin. Hij spreekt in interview 4 bij bijna alle opdrachten over het aspect ‘snelheid’. Het gebruik van het woord ‘snelheid’ bemoeilijkt voor zowel Karin als Piet een correcte interpretatie van opdrachten waarin de tijd niet de onafhankelijke variabele is.

Leerlingen die vaak grafische aspecten noemen: Bob, Casper, Dorien, Nico en Otto noemen en gebruiken vooral grafische aspecten. Bob en Dorien gebruiken in de interviews 2 en 3 vooral het aspect ‘steilheid’ in hun redeneringen, soms in combinatie met het aspect ‘snelheid’. Bob combineert de beide aspecten ook met het aspect ‘richtingscoëfficiënt’, terwijl Dorien in interview 4 minder over ‘steilheid’ spreekt maar meer redeneert over ‘de deling van delta y door delta x’.

Casper, Nico en Otto hebben na de introductie van de differentiaalrekening een voorkeur voor het aspect ‘richtingscoëfficiënt’. In hun uitspraken wordt dit aspect gerelateerd aan ‘afgeleide’ of ‘snelheid’. Na interview 2 volgen deze drie

leerlingen een verschillende ontwikkeling. Casper heeft in interview 3 een terugval in het noemen van aspecten, maar komt in interview 4 weer terug op het aspect 'richtingscoëfficiënt'. Otto noemt in interview 3 meerdere keren het aspect 'delen van delta y door delta x', maar heeft in interview 4 weer een sterke voorkeur voor het aspect 'richtingscoëfficiënt'. De uitspraken van Nico verschuiven in het laatste interview naar 'toename per eenheid'.
Leerlingen die weinig aspecten noemen: Andy, Elly en Maaike noemen in alle interviews weinig aspecten. Bij Elly en Maaike is dit terug te voeren op het ontbrekende overzicht over het concept afgeleide. Beide leerlingen noemen ook geen vast aspect dat in meerdere interviews centraal staat in hun spreken. Andy heeft vanaf interview 1 goede ideeën over procedures om opdrachten op te lossen. Dit uit zich echter niet in zijn redeneren over de opdrachten maar wel in zijn handelen tijdens berekenopdrachten.

7.5 Ontwikkeling in relatie met de onderwijscontext

Om de ontwikkeling van de leerlingen te kunnen begrijpen en te kunnen verklaren is in hoofdstuk 5 beschreven welke leerstof met betrekking tot het concept afgeleide voor en tussen de opeenvolgende interviews is aangeboden en welke accenten door docenten zijn gelegd. Op basis van deze feiten geef ik mogelijke verklaringen voor de waargenomen ontwikkeling.

Keuze van procedures
Opvallend is de nadruk op het gebruik van grafische procedures in interview 2 ondanks het gegeven dat zowel de symbolische, de grafische en in mindere mate de numerieke procedures bij de introductie van de differentiaalrekening zijn behandeld. Mogelijk versterkt het werken met de grafische representatie bij zowel natuurkunde als wiskunde elkaar. Het rekenen met formules bij differentiaalrekening wordt alleen bij wiskunde geoefend. Een andere verklaring is dat grafische procedures meer voorstelbaar zijn en eenvoudiger zijn toe te passen. In hoofdstuk 8 wordt hier verder op ingegaan.

In interview 4 is het gebruik van het symbolisch differentiëren toegenomen ten opzichte van interview 2. Mogelijk is dit een gevolg van het feit dat na interview 2 de differentiaalrekening is herhaald en uitgebreid en dat veel geoefend is met het symbolisch differentiëren. Drie leerlingen van school B hebben in het afsluitende interview 4 een sterke voorkeur voor het differentiëren van functies met daarbij minimale grafische of numerieke ondersteuning. Deze leerlingen verwoorden dat ze de voorkeur geven aan de exacte berekening met formules boven minder nauwkeurige grafische of numerieke procedures. Dit sluit aan bij opmerkingen van hun docent B die de leerlingen veel laat oefenen op het symbolisch differentiëren en benadrukt dat deze werkwijze exact is, terwijl grafische en numerieke procedures onnauwkeurig

zijn. Numerieke procedures worden na de introductie van de differentiaalrekening niet meer herhaald of uitgebreid.
De nadruk die docent B legt op het symbolisch differentiëren kan verklaren dat de breedte van het repertoire van leerlingen van school B minder groot is dan van school A (zie figuur 7.4). Docent B vraagt zich ook af wat leerlingen in vwo 6 nog weten van de introductie van de differentiaalrekening. Hij zegt: "*Eerst hebben ze delta y, delta x, dan kom je langzaam bij differentiaalquotiënten en afgeleiden, en nu ben je een heel stuk verder, en weten ze dat begin nog? Je hoopt altijd dat er meer achterblijft, maar het lijkt of, wanneer het niet meer op de voorgrond is, dat het dan slijt of zo*." Een soortgelijke opmerking maakt docent B over het gebruik van de klein-intervalmethode: "*In vwo 5 hebben we veel met het differentiequotiënt gedaan, met steeds kleiner worden intervallen. In vwo 6 verwacht ik niet meer dat ze deze methode gebruiken, dan is dat weg*."
Op school A valt ook nadruk op het symbolisch differentiëren maar zowel in het wiskundeboek als in de wiskundeles blijft de grafische representatie een rol spelen. In het wiskundeboek is bijvoorbeeld in vwo 6 aandacht besteed aan het interpreteren van grafieken van afgeleide functies. Daarnaast zegt wiskundedocente P in een interview: "*Ik ben plaatjesgericht; dat benadruk ik in de lessen ook. Als je een som ziet probeer dan eerst even een indruk te krijgen door de grafiek te plotten.*"

In de interviews 1, 2 en 3 gebruiken leerlingen van beide scholen de behandelde natuurkundeformules niet accuraat. In interview 4 zijn de formules voor de valbeweging vaker door leerlingen genoemd en accuraat gebruikt. Een verklaring kan zijn dat dit onderwerp op beide scholen in vwo 6 voor interview 4 herhaald is en dat een toets is gegeven over alle leerstof van kinematica en mechanica.

Economieformules zijn op school A al voor interview 1 behandeld. In interview 1 komt dit ook naar voren bij Elly die refereert aan het gelijkstellen van MO en MK. Pas vanaf interview 3 worden economieformules door één leerling van school A accuraat uitgevoerd. Een andere leerling van school A noemt ook economische procedures en aspecten maar doet dit niet accuraat. Op school B spreekt de enige leerling die economie volgt in geen van de interviews over economische aspecten of formules. De waarneming op beide scholen lijkt in lijn met opmerkingen van de economiedocenten. Docenten van school A benadrukken de wiskundige kant van de economie terwijl de economiedocent op school B betekenissen van de economische aspecten zoals marginale kosten en opbrengsten benadrukt en minder gericht is op het oefenen van de wiskundige procedures.

Moment van gebruik van procedures

In de opeenvolgende interviews blijkt dat leerlingen de opdrachten maken met in de les behandelde procedures zoals de raaklijnmethode, het symbolisch differentiëren, rekenmachine-opties of natuurkundeformules. Echter, de meeste leerlingen gebruiken deze procedures niet of gebruiken ze beperkt in het interview dat volgt op de periode waarin deze procedure in de les is geïntroduceerd. Dit geldt bijvoorbeeld in interview 1 voor de raaklijnmethode (alleen school A) en in interview 2 voor het symbolisch differentiëren, het gebruik van rekenmachine-opties en het gebruik van natuurkundeformules voor de valbeweging.

Geïntroduceerde procedures blijken dus in eerste instantie bij meerdere leerlingen geen onderdeel te zijn van hun repertoire of niet accuraat te worden uitgevoerd. Pas in een later stadium worden de procedures accuraat gebruikt. Dit blijkt uit de volgende voorbeelden:

- Bob spreekt in interview 2 na de introductie van de differentiaalrekening over twee soorten afgeleiden. Dit is te verklaren uit de twee verschillende manieren waarop differentieerregels voor polynomen worden geïntroduceerd.
- Casper denkt in hetzelfde interview 2 eerst dat de afgeleide te vinden is met de formule $v = 2at + b$ (zie figuur 5.3).
- Otto gebruikt in interview 2 de rekenmachine-optie 'tangent' maar kan uit de formule van de raaklijn de momentane snelheid niet berekenen.
- Piet berekent in interview 3 de formule voor de raaklijn, terwijl de richtingscoëfficiënt voldoende is.

Geïntroduceerde procedures die in de loop van het onderwijs herhaald worden, blijken bij veel leerlingen pas in latere interviews onderdeel te worden van het repertoire. Door herhaling verbreedt het repertoire en krijgt het meer samenhang.

Genoemde aspecten

In hoofdstuk 5 wordt duidelijk dat in de schoolboeken een breed begrippenkader is gebruikt bij de introductie van de differentiaalrekening (zie tabel 5.1 en 5.2). In vervolghoofdstukken over differentiëren versmalt het gebruik van aspecten en komt vooral het begrip 'richtingscoëfficiënt' van de raaklijn naar voren. In mijn onderzoek blijkt dat in eerste instantie van al deze begrippen vooral 'steilheid', 'snelheid' en 'richtingscoëfficiënt' door leerlingen worden gebruikt. Later, in de interviews 3 en 4, voegen enkele leerlingen daar aspecten aan toe als 'het delen van delta y door delta x' en 'de toename per eenheid'.

Het is lastig een relatie te leggen tussen het gegeven onderwijs en de voorkeuren voor aspecten, zoals 'steilheid', 'snelheid' of 'richtingscoëfficiënt'.

Mogelijk zijn de volgende relaties:

- Op school A staan de aspecten ‘steilheid’ in combinatie met ‘snelheid’ centraal in het natuurkundehoofdstuk over kinematica. Dit hoofdstuk is al voor interview 1 behandeld. In het wiskundeboek komt het begrip ‘steilheid’ niet voor. Twee leerlingen van school A gebruiken het aspect ‘steilheid’ vaak, terwijl op school B dit aspect weinig genoemd wordt.
- Het aspect ‘richtingscoëfficiënt’ wordt in de wiskundeboeken van beide scholen veel gebruikt. Op beide scholen zijn er leerlingen die dit aspect vaak noemen, maar ook leerlingen die het in geen enkel interview noemen.
- Bij twee leerlingen, beiden van school B, komt de relatie tussen afgeleide en snelheid centraal te staan. Een mogelijke verklaring is het feit dat deze relatie op deze school zowel bij wiskunde als natuurkunde wordt geëxpliciteerd (zie figuur 5.5 en 5.7). Het blijkt dat deze leerlingen bij meerdere opdrachten baat hebben bij het interpreteren van de afgeleide als snelheid, maar hierdoor gehinderd worden in opdrachten waarbij de onafhankelijke variabele niet de tijd is. Op school A noemen drie leerlingen dat de afgeleide de snelheidsformule oplevert. Deze uitdrukking wordt gebruikt in het wiskundeboek van school A (zie figuur 5.3).
- Eén leerling interpreteert de afgeleide in interview 4 in meerdere opdrachten als toename per eenheid. Deze leerling volgt ook het schoolvak economie. Aangezien in de lessen economie marginale kosten zijn gedefinieerd als toename per eenheid, ligt hierin een mogelijke verklaring voor zijn interpretaties.

Naast de genoemde aspecten zijn er andere aspecten die door leerlingen niet of nauwelijks genoemd worden, hoewel ze wèl zijn behandeld. Dit betreft bijvoorbeeld het aspect ‘differentiequotiënt’ en het aspect ‘verandering’.

Voorafgaand aan interview 2 is in de wiskundeles het limietproces behandeld. Enkele leerlingen doen vooral bij de opdracht *Benzine* uitspraken over het limietproces. Deze uitspraken zijn meestal globaal en leerlingen verwijzen vaak expliciet naar de uitleg in de les door te refereren aan de gebruikte letters (t en h op school A, s op school B, zie figuren 5.2 en 5.4). Ondanks dat het limietproces na de introductie van de differentiaalrekening niet meer herhaald of geoefend wordt, lukt het enkele leerlingen wel in latere interviews bij de opdracht *Benzine* meer correcte uitspraken te doen over de gegeven formule. Toch lukt het geen enkele leerling het limietproces precies te verwoorden.

De fasering van het onderwijs lijkt van invloed op het noemen en het gebruiken van eenzelfde aspect in verschillende opdrachten binnen één interview. Voor interview 1 is op school A in vwo 4 bij natuurkunde uitgelegd dat de snelheid op één moment gevonden kan worden met de raaklijnmethode, terwijl op school B dit pas in het begin van vwo 5 is behandeld. Drie leerlingen van school A noemen in interview 1 bij verschillende opdrachten dat het om hetzelfde aspect gaat en kiezen vervolgens voor dezelfde procedure. Geen enkele leerling van school B doet dit. Tussen interview 1 en 2 is op beide scholen de differentiaalrekening bij wiskunde geïntroduceerd en is ook op school B bij natuurkunde de raaklijnmethode behandeld. Vanaf interview 2 is niet meer waar te nemen dat leerlingen van school A meer overeenkomsten tussen opdrachten herkennen dan de leerlingen van school B. Wel gebruiken de leerlingen van school A meer verschillende procedures.

Samengevat met betrekking tot de relatie tussen de geobserveerde ontwikkeling en de onderwijscontext:

- De toenemende nadruk op het symbolisch differentiëren leidt ertoe dat enkele leerlingen als resultaat de grafische en numerieke procedures niet meer gebruiken.
- Explicitering van relaties tussen schoolvakken heeft wél tot gevolg dat enkele leerlingen bepaalde relaties op dezelfde manier expliciteren als de leraar of het schoolboek, maar dit leidt bij de meeste leerlingen niet tot samenhangende kennis.
- Geïntroduceerde procedures die in de loop van het onderwijs zijn herhaald, zijn pas in latere interviews onderdeel van het repertoire van leerlingen.
- Hoewel in de schoolboeken veel aspecten van het concept afgeleide genoemd zijn, hebben leerlingen in mijn onderzoek een voorkeur voor de grafische aspecten ‘steilheid’ en ‘richtingscoëfficiënt’ en het fysische aspect ‘snelheid’.
- Na de introductie van de differentiaalrekening blijken veel leerlingen nog onvoldoende de samenhang in de behandelde procedures en aspecten te doorzien.

Hoofdstuk 8 Conclusies, discussie en aanbevelingen

Aanleiding tot dit onderzoek naar de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide is de ervaring dat leerlingen uit de natuurprofielen van vwo 4, 5 en 6 bij wiskunde verworven kennis moeilijk toepassen in andere schoolvakken. Het concept afgeleide is in dit onderzoek gedefinieerd als het geheel van representaties procedures en aspecten die gerelateerd zijn aan de afgeleide zoals gebruikt bij de schoolvakken wiskunde, natuurkunde en economie (zie figuur 3.2). Op basis van het model voor 'mathematical proficiency' (Kilpatrick e.a., 2001) is wiskundige bekwaamheid onderzocht door te kijken naar breedte en samenhang van het repertoire van een leerling, het gebruik van grafische, symbolische en numerieke representaties en het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide zoals 'steilheid' en 'toename' (zie tabel 3.2).

Dit onderzoek is een beschrijvende, longitudinale multiple-casestudie. Bij tien leerlingen, vijf van school A en vijf van school B, is halfjaarlijks een opdracht-gebaseerd interview afgenomen. In het interview maakten leerlingen hardop-denkend opdrachten die gerelateerd zijn aan het concept afgeleide. Het eerste interview, interview 1, is afgenomen in vwo 4 voor de introductie van de differentiaalrekening. Het laatste interview, interview 4, is afgenomen in vwo 6 na afronding van de differentiaalrekening. Uitspraken en handelingen van leerlingen zijn op video vastgelegd en getranscribeerd. Vervolgens is de breedte en de samenhang van het repertoire van een leerling geanalyseerd en is daarnaast geanalyseerd welke representaties en aspecten van het concept afgeleide door elk van de leerlingen worden gebruikt en genoemd.

Hoofdstuk 6 beschrijft de resultaten van de analyse van individuele leerlingen. Hoofdstuk 7 bevat de synthese van de resultaten. In dit hoofdstuk 8 volgt een nabeschouwing op de resultaten van het onderzoek. In paragraaf 8.1 worden de conclusies beschreven. Paragraaf 8.2 beschrijft de reflectie op het onderzoek en paragraaf 8.3 sluit af met aanbevelingen voor het onderwijs.

8.1 Conclusies

In paragraaf 8.1.1 tot en met 8.1.6 wordt een aantal conclusies van het onderzoek besproken waarna in 8.1.7 het antwoord op de onderzoeksvraag en de deelvragen wordt gegeven.

8.1.1 Breedte en samenhang van het repertoire

De verschuiving van grafische en numerieke naar symbolische procedures
In de synthese van de resultaten is geanalyseerd welke procedures door leerlingen zijn gebruikt (zie tabellen 6.1.3 tot 6.10.3 en tabel 7.5). Het volgende patroon is zichtbaar in de tijd:

- In eerste instantie worden overwegend grafische procedures gebruikt.
- Vervolgens worden symbolische en grafische procedures gebruikt.
- De meeste leerlingen krijgen uiteindelijk een voorkeur voor symbolische procedures.
- Numerieke procedures worden niet veel gebruikt en het gebruik ervan neemt ook nog eens af.

Eerdere onderzoeken beschrijven de relatie tussen de grafische en symbolische representatie van de afgeleide zoals die door leerlingen vaak gelegd wordt (Asiala e.a., 1997; Kendal, 2001; Marrongelle, 2001; Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 2000). In mijn onderzoek wordt echter duidelijk dat ook na de introductie van de differentiaalrekening met symbolische representaties leerlingen voornamelijk grafische procedures blijven gebruiken om probleemsituaties aan te pakken. Hoewel ze symbolische procedures op dat moment wel kunnen uitvoeren zijn die kennelijk nog niet sterk gerelateerd aan het gebruik in situaties. Later, na herhaling en uitbreiding van de differentiaalrekening, wordt het gebruik van symbolisch differentiëren dominant.
Daarnaast blijkt uit mijn onderzoek dat leerlingen de numerieke representatie weinig gebruiken, zoals ook blijkt uit het onderzoek van Kendal (2000). Het gebruik van numerieke procedures neemt in de loop van vwo 4, 5 en 6 af.

Samenhang van het repertoire
In interview 2 staat het uitvoeren van de differentieerregels voor de meeste leerlingen los van parallelle grafische en numerieke procedures. De samenhang tussen de grafische procedure en het symbolisch differentiëren bij de toepassing in situaties is dan nog niet sterk. Deze waarneming sluit aan bij conclusies van onderzoeken waarin beschreven wordt dat het uitvoeren van differentieerregels wel wordt beheerst zonder dat er veel begrip is van de betekenis van het concept afgeleide (Kendal & Stacey, 2003; Orton, 1983).
In de interviews 3 en 4 lukt het echter bijna alle leerlingen het symbolisch differentiëren te combineren met en te relateren aan andere procedures. Daarin is de ontwikkeling zichtbaar van een zoekend en stapsgewijs toepassen van geïsoleerde procedures in interview 2 naar een effectief, naast elkaar toepassen van procedures. Ook blijkt dat enkele leerlingen, die bij een opdracht al twee procedures goed aan elkaar kunnen relateren, in interview 4 andere procedures toevoegen aan de hun al bekende procedures.

Breedte van het repertoire in relatie met het gegeven onderwijs
Uit mijn onderzoek blijkt dat het veelvuldig oefenen van het symbolisch differentiëren en het gebruik van deze techniek in een smalle klasse van opdrachten (raaklijn- en extremenopdrachten) tot gevolg heeft dat leerlingen een smaller repertoire ontwikkelen. Dit staat de ontwikkeling van flexibel inzetbare kennis op een brede klasse van problemen in de weg (zie ook Kendal & Stacey, 2003; Orton, 1983). De vijf leerlingen van school B, de school waar veel geoefend wordt op het rekenen met formules en differentieerregels, tonen in de interviews ten opzichte van school A een smaller repertoire. Deze leerlingen geven in interview 4 bij vrijwel alle opdrachten de voorkeur aan het symbolisch differentiëren en gebruiken grafische of numerieke procedures niet meer als een alternatief. Dit sluit aan bij onderzoek van Kendal en Stacey (2000) waarin de voorkeur van de docent voor de grafische of voor de symbolische representatie van invloed is op het representatiegebruik van leerlingen. Dit lijkt ook het geval te zijn bij enkele leerlingen van school B. Hun overtuiging dat een symbolische procedure de wiskundig correcte manier is om een opdracht op te lossen, lijkt beïnvloed te zijn door de docent (zie ook Herman, 2007).

Model voor ontwikkeling
De ontwikkeling in de breedte en de samenhang van het repertoire is te interpreteren in termen van het door Tall (2007a, 2008) ontwikkelde model voor cognitieve ontwikkeling en procedurecompressie (zie figuur 2.3), maar levert ook extra informatie op over dit model. Tall beschrijft een ontwikkeling van een ‘conceptual-embodied world’ (waarneembaar, concreet), via tussenstadia naar een ‘proceptual-symbolic world’ (“*ability to think about mathematics symbolically*”). Grafische en numerieke procedures zijn procedures in de ‘conceptual-embodied world’, terwijl het symbolisch differentiëren onderdeel is van de ‘proceptual-symbolic world’. Op grond van het waargenomen gedrag van leerlingen zijn er kanttekeningen te plaatsen bij het model van Tall voor het beschrijven van de ontwikkeling in wiskundige bekwaamheid.

- Een compressie van procedures is waargenomen, maar niet alleen voor de symbolische, maar ook voor de grafische en numerieke procedures.
- Wiskundig bekwame leerlingen kenmerken zich door het flexibel kiezen en uitvoeren van *meerdere* procedures naast elkaar, zowel uit de ‘conceptual-embodied world’ als de ‘proceptual-symbolic world’.
- Leerlingen die binnen de ‘conceptual-embodied world’ hun procedures blijven kiezen, kunnen heel adequaat binnen de beschreven situaties procedures van het concept afgeleide toepassen (bijvoorbeeld Andy en Nico).
- Leerlingen kunnen opeens een *sprong* maken van procedures uit de ‘conceptual-embodied world’ naar procedures uit de ‘proceptual-symbolic

world' zonder de onderlinge samenhang te begrijpen (bijvoorbeeld Maaike).
- Leerlingen kunnen overstappen naar symbolische procedures ('proceptual-symbolic world') maar tonen geen procedurecompressie; zij grijpen niet meer terug op procedures uit de 'conceptual-embodied world' (bijvoorbeeld Karin en Piet).
- Leerlingen die alleen maar geïsoleerde procedures beheersen, kunnen niet in het model van Tall beschreven worden (bijvoorbeeld Elly).
- Procedures die geïsoleerd zijn geleerd bij andere schoolvakken vormen in eerste instantie geen onderdeel van 'compressie van procedures'.
- Het model van procedurecompressie maakt niet duidelijk dat er verschillende manieren zijn waarop compressie kan plaatsvinden. Soms worden pas later procedures gerelateerd aan al eerder geclusterde procedures en soms blijven bepaalde procedures geïsoleerd van al gecomprimeerde procedures (zie ook 8.1.4).

8.1.2 Aspecten van het concept afgeleide

Voorkeur voor grafische aspecten en snelheid

In mijn onderzoek blijken grafische aspecten veel gebruikt te worden in redeneringen van leerlingen. De voorkeur voor deze aspecten blijft in de opeenvolgende interviews bij de meeste leerlingen bestaan. Ook in het onderzoek van Zandieh (1997) doen leerlingen veel uitspraken in grafische termen (slope, steepness).

Een verklaring hiervoor is ten eerste dat grafieken voor leerlingen beter voorstelbaar zijn dan formules (zie ook Zandieh, 1997). Meerdere leerlingen relateren de vorm van de grafiek aan de situatie waar de grafiek informatie over geeft. Een tweede verklaring is dat grafieken breed worden ingezet om verschillende situaties te beschrijven. Zowel in wiskunde, scheikunde, natuurkunde als economie worden grafieken gebruikt om situaties te beschrijven en moeten leerlingen de steilheid van de grafiek op een interval of in een punt interpreteren. Meerdere leerlingen herkennen dat in verschillende situaties een momentane verandering correspondeert met de steilheid van de grafiek in een punt. De steilheid van de grafiek fungeert als een brug tussen verschillende situaties.

Ook redeneren enkele leerlingen (Karin en Piet) veel vanuit het aspect 'snelheid'. Voor deze leerlingen blijft dit aspect centraal staan in de opeenvolgende interviews. Het gebruik van redeneringen over 'snelheid' is in eerder onderzoek waargenomen (Marrongelle, 2004; Zandieh, 1997). In het onderzoek van Zandieh (1997) blijken echter uitspraken over 'velocity' in de loop van een jaar af te nemen, terwijl in mijn onderzoek het gebruik van het aspect 'snelheid' bij enkele leerlingen juist toeneemt. Er zijn wel verschillen tussen leerlingen in de manier waarop ze redeneren over dit aspect. Sommige leerlingen zeggen: "*de afgeleide is de snelheid*", andere leerlingen zeggen: "*de afgeleide levert de snelheidsgrafiek of snelheidsformule op*" (school A) en weer andere leerlingen gebruiken: "*de afgeleide van de afgelegde weg is de snelheid en de afgeleide van de snelheid de versnelling*" (school B).

De voorkeur voor het aspect 'snelheid' en de gelegde relatie met andere aspecten is mogelijk een gevolg van het gegeven dat in het onderwijs van de differentiaalrekening en de kinematica 'snelheid' in verband wordt gebracht met respectievelijk 'afgeleide' en 'steilheid'. Daarnaast zijn fysische aspecten evenals grafische aspecten meer voorstelbaar en concreet voor leerlingen. Wel hindert een sterke relatie tussen 'afgeleide' en 'snelheid' enkele leerlingen in opdrachten waarin 'tijd' niet de onafhankelijke variabele is. De koppeling van het woord 'snelheid' aan fysische situaties bemoeilijkt het gebruik ervan in andere situaties.

Het aspect 'verandering'

Zandieh (1997) rapporteert dat het aspect 'rate of change' in uitspraken van leerlingen een centrale rol speelt. Ook in andere studies is dit een veel voorkomend en gebruikt aspect (Confrey & Smith, 1994; Schneider, 1992; Thompson & Thompson, 1994, 1996). In mijn onderzoek blijkt het aspect 'verandering' nauwelijks gebruikt te worden. Een mogelijk Nederlands equivalent als 'mate van verandering' of 'momentane verandering' komt in schoolboeken niet voor en wordt door docenten en leerlingen niet gebruikt.

Aspecten in relatie met het gegeven onderwijs

Redenerend over het aspect 'snelheid' doen enkele leerlingen van school A de uitspraak: "*de afgeleide is de snelheidsformule*". Bij leerlingen van school B komt deze uitspraak niet voor. Dit lijkt beïnvloed te worden door het schoolboek (zie figuur 5.3), omdat bij de introductie van de differentiaalrekening dit zo is verwoord in het boek dat wordt gebruikt op school A.

Op school B wordt door meerdere leerlingen het verband tussen afgelegde weg, snelheid en versnelling genoemd. Dit sluit aan bij door leerlingen gemaakte aantekeningen bij wiskunde en natuurkunde (zie figuur 5.5 en 5.7).

De verwoording van aspecten in schoolboeken en in de les beïnvloedt dus de uitspraken van leerlingen. Door het uitvoeren van lesobservaties zou de invloed van uitspraken van docenten op door leerlingen genoemde aspecten nader onderzocht kunnen worden.

Uit mijn onderzoek blijkt dat het enkel noemen van de limietdefinitie bij de introductie van de differentiaalrekening op beide scholen niet leidt tot bestendigde kennis van het limietproces. Uitspraken van leerlingen over het limietproces zijn en blijven in de vier opeenvolgende interviews zeer beperkt en globaal. Ook uit andere onderzoeken (Hähkiöniemi, 2006; Weitendorf,

2007; Zandieh, 2000) blijkt het begrijpen van de limietdefinitie voor leerlingen in het secundair onderwijs moeilijk te zijn, terwijl in de landen waar deze onderzoeken zijn uitgevoerd meer aandacht aan de limietdefinitie wordt besteed dan in Nederland.
Leerlingen van school A noemen al in interview 1 verbanden tussen opdrachten, namelijk dat in meerdere opdrachten 'een momentane snelheid' of 'steilheid op één punt' wordt gevraagd. Daarin hebben de leerlingen van school A een voorsprong ten opzichte van die van school B. Essentieel daarbij is dat het onderwerp 'snelheid op één moment' in het natuurkundeonderwijs van school A al behandeld is voor interview 1. Het lijkt erop dat een leerling pas na een eerste kennismaking met 'momentane verandering of snelheid' deze overeenkomst tussen opdrachten kan herkennen. Leerlingen van school B noemen deze overeenkomsten tussen opdrachten pas vanaf interview 2.

8.1.3 Verschillen in de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid

In mijn onderzoek komen bepaalde patronen in ontwikkeling naar voren, zoals de uitbreiding van het repertoire, de sterker wordende voorkeur voor het relateren van symbolische en grafische procedures en het herhaald gebruik van procedures bij verschillende opdrachten. Tegelijkertijd zijn er echter grote verschillen tussen leerlingen in hun ontwikkeling. De combinatie van patronen in de ontwikkeling van leerlingen en tegelijkertijd de grote verschillen tussen de ontwikkeling van leerlingen sluit enigszins aan bij Zandiehs (2000) metaforische beschrijving:

> *These understandings* (of the concept 'derivative', GR) *are like the understandings of the blind men who examine the elephant, each taking a different part of the elephant (tail, ear, side) as its interpretation of the whole. As each student develops a more complete understanding, their understanding becomes more similar. In this way, a student's understanding of derivative develops from a partial understanding, each student with a different collection of pieces of the puzzle, to a more complete understanding with perhaps only a few pieces remaining unplaced.* (p. 124)

De patronen die in mijn onderzoek zichtbaar zijn, kunnen geïnterpreteerd worden in lijn met Zandiehs uitspraak dat "*understandings becomes more similar*". Toch zijn tijdens het afsluitende interview de verschillen tussen leerlingen groot, zowel in de wiskundige bekwaamheid als in de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid.
Deze verschillen tussen leerlingen komen op allerlei manieren naar voren:

- *Periode van de grootste ontwikkeling*
  Bij enkele leerlingen is de ontwikkeling vooral zichtbaar van interview 1 naar interview 2, bij anderen van interview 2 naar interview 3 of van interview 3 naar interview 4.

- *Moment waarop behandelde leerstof wordt gebruikt*
  Enkele leerlingen passen de in de les behandelde procedures direct toe in het eerstvolgende interview, de meesten doen dat pas in een later stadium.
- *De rol van het symbolisch differentiëren*
  Het symbolisch differentiëren komt bij de meeste leerlingen steeds meer centraal te staan. Eén leerling (Andy) met een breed repertoire tijdens het eerste interview breidt dit echter niet uit met het symbolisch differentiëren.
- *Het relateren van grafische en symbolische procedures*
  Eén leerling (Maaike) blijkt in geen enkel interview de koppeling tussen raaklijnen en afgeleiden te gebruiken terwijl dat voor andere leerlingen de meest gebruikte combinatie van procedures is.
- *Voorkeur voor aspecten*
  Meerdere leerlingen noemen vooral grafische aspecten, andere leerlingen vooral het aspect ‘snelheid’. Daarnaast zijn er enkele leerlingen die nauwelijks aspecten noemen.
- *Memoriseren*
  Eén leerling (Elly) gebruikt vooral betekenisloos gememoriseerde procedures. Skemp (1976) noemt deze vorm van begrijpen ‘instrumental understanding’, dat is het leren van ‘rules without reason’. Deze manier van ‘begrijpen’ bleek toereikend voor het met succes afronden van wiskunde-B1.
- *Relateren van kinematicaformules en wiskundeprocedures*
  De meeste leerlingen gebruiken de kinematicaformules geïsoleerd van andere procedures. Enkele leerlingen noemen in de loop van het onderzoek wel dergelijke relaties.

Deze verschillen kunnen deels verklaard worden door de onderwijscontext. Tegelijkertijd blijken er grote verschillen te zijn tussen leerlingen die bij elkaar in de klas hebben gezeten. Bijvoorbeeld Andy en Bob; Dorien, Casper en Elly; Nico, Otto en Piet; Karin en Maaike (zie ook figuur 7.9). In andere onderzoeken naar het leren van het concept afgeleide blijken leerlingen die in dezelfde klas zitten ook sterk te verschillen in hun begrijpen van het concept afgeleide (Delos Santos, 2006; Hähkiöniemi, 2006; Marrongelle, 2001; Zandieh, 1997). Leerlingen ontwikkelen dus ook in sterk gelijkende onderwijscontexten hun eigen voorkeuren in gekozen procedures, genoemde aspecten en gebruikte representaties.

8.1.4 Samenhang tussen procedures behandeld bij verschillende schoolvakken

Leerlingen relateren in de loop van vwo 4, 5 en 6 bepaalde procedures aan elkaar die bij verschillende schoolvakken zijn behandeld, terwijl andere procedures geïsoleerd gebruikt worden.

Raaklijn en differentiequotiënt

Meerdere leerlingen relateren procedures aan elkaar die zowel bij wiskunde als bij natuurkunde behandeld zijn. Dit ondanks de verschillen in manieren van aanbieden en gebruik bij de twee schoolvakken. Dit betreft de raaklijnmethode en het differentiequotiënt. Dit wordt hieronder toegelicht.

- Veel leerlingen relateren de bij natuurkunde behandelde raaklijnmethode en de bij wiskunde behandelde procedure voor het opstellen van raaklijnformules aan elkaar. In de loop van het onderzoek wordt de raaklijnmethode door de meeste leerlingen accuraat gebruikt en gerelateerd aan het symbolisch differentiëren. Dit is echter niet vanzelfsprekend want er zijn ook twee leerlingen (Elly en Maaike) die de raaklijnmethode alleen gebruiken in opdrachten die sterk lijken op bij natuurkunde geoefende opdrachten.
- Enkele leerlingen relateren de formules voor gemiddelde snelheid $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ aan de notatie van het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De meeste leerlingen leggen deze relatie niet.

Er zijn door leerlingen dus relaties geconstrueerd tussen onderwerpen die zowel bij wiskunde als bij natuurkunde onderwezen zijn, met name wat betreft de onderwerpen ‘raaklijnen’ (7 leerlingen) en ‘differentiequotiënten’ (4 leerlingen).

Formules bij schoolvakken

Enkele leerlingen relateren in hun uitspraken ‘afgeleide’ en ‘snelheid’ aan elkaar, maar dit resulteert in veel gevallen niet in het expliciteren van de relatie tussen kinematicaformules van afgelegde weg, snelheid en versnelling. De resultaten van dit onderzoek ondersteunen daarmee de uitspraken in artikelen en rapporten die in hoofdstuk 1 genoemd zijn (Van de Giessen, 2007).

Er is op dit punt bij enkele leerlingen wel verbetering geconstateerd. Eén leerling (Karin) noemt expliciet dat de kinematicaformule voor de valsnelheid $v = g \cdot t$ de afgeleide is van de formule voor de afgelegde weg. Deze leerling vertelt dat dergelijke verbanden expliciet worden genoemd in de les door haar natuurkundeleraar G, die tevens wiskundeleraar is. Voor de meeste leerlingen blijkt echter het noemen van bepaalde relaties tussen schoolvakken niet te resulteren in samenhang tussen geleerde formules.

Ook economieformules functioneren bij enkele leerlingen geïsoleerd van de procedures die bij wiskunde behandeld zijn. In het onderzoek relateert één leerling (Casper) het economische begrip marginale kosten correct aan het wiskundige begrip afgeleide en maakt hij in de interviews 3 en 4 gebruik van deze relatie bij het oplossen van de economie-opdrachten.

Verklaringen van samenhang

Twee verklaringen van het verschil tussen het meer aan elkaar relateren van raaklijn en differentiequotiënt en het minder relateren van formules zijn de visuele herkenbaarheid en het onderwijzen van een procedure of aspect in meerdere situaties. Dit wordt hieronder toegelicht.

- Er is een sterke visuele overeenkomst tussen een raaklijn bij natuurkunde (bij de raaklijnmethode) en een raaklijn bij wiskunde (via een kantelende koorde). Dit geldt ook voor de notatie $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ voor een gemiddelde snelheid en de notatie $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van een differentiequotiënt. De visuele overeenkomst tussen een afgeleide functie zoals $f'(x) = 2x$ en de formule voor momentane valsnelheid $v = g \cdot t$ is minder sterk. Visuele verschillen tussen beide formules zijn het aantal gebruikte 'letters', de functienotatie die aangeeft wat de onafhankelijke variabele is en het accentteken waarmee de afgeleide wordt aangeduid. De leerling die economische formules en wiskunde aan elkaar relateert doet dit ook op basis van het accent in de notatie TK′ = MK. Het accentteken vervult daarmee een brugfunctie tussen berekeningen met marginale kosten en het concept afgeleide.
- De raaklijnmethode en de notatie van het differentiequotiënt zijn in het onderwijs in verschillende situaties behandeld, namelijk bij wiskunde en bij natuurkunde. De raaklijnmethode wordt ook in scheikundeboeken gebruikt om de reactiesnelheid te berekenen (Den Braber, 2007). Hierdoor zijn deze procedures of notaties voor meerdere leerlingen niet gerelateerd aan één situatie maar aan verschillende situaties. Dit maakt het gebruik ervan in verschillende situaties makkelijker. Dit geldt veel minder voor symbolisch differentiëren. Bij natuurkunde en economie wordt in het onderwijs nauwelijks gesproken over afgeleiden en differentiëren (zie tabel 5.1 en 5.2). Symbolische differentiëren wordt leerlingen hoofdzakelijk geleerd bij het vak wiskunde en functioneert geïsoleerd van andere schoolvakken.

8.1.5 Conceptuele problemen

Het onderzoek is niet specifiek gericht op het analyseren van conceptuele problemen van leerlingen. Het longitudinale karakter van het onderzoek levert echter informatie over de ontwikkeling van in eerder onderzoek geconstateerde conceptuele problemen bij leerlingen.

- De formulering "de afgeleide is de raaklijn" is door twee leerlingen in interview 2 opgevat alsof de afgeleide functie direct de formule van de raaklijn oplevert. Deze misvatting is ook aangetroffen in onderzoek van Asiala e. a. (1997) en Zandieh en Knapp (2006). De betreffende leerlingen gebruiken deze formulering in interview 4 echter niet meer en hebben op dat moment een beter inzicht in de relatie tussen raaklijn en afgeleide.

- Enkele leerlingen gebruiken in de interviews 1 en 2 verschillende varianten voor de berekening van een gemiddelde snelheid, die gebaseerd zijn op het middelen van twee snelheden. De berekeningen lijken gebaseerd op een formule voor gemiddelde snelheid, namelijk $v_{gem} = (v_{begin} + v_{eind}) /2$, die alleen geldig is voor eenparig versnelde bewegingen. In onderzoek van Bezuidenhout (1998) gebruikt een grote groep leerlingen dergelijke, niet correcte varianten om een gemiddelde snelheid te berekenen. De leerlingen die in de eerste twee interviews de gemiddelde snelheid op deze manier berekenen, kunnen in het derde interview de gemiddelde snelheid wel correct berekenen.
- Een leerling (Bob) beweert in de eerste twee interviews dat "de gemiddelde snelheid de raaklijn is". Deze uitspraak is niet gerapporteerd in eerdere onderzoeken. De betreffende leerling verwart in zijn uitleg gemiddelde en momentane veranderingen. Na interview 2 komt de betreffende uitspraak niet meer voor en gebruikt hij de raaklijn correct om een momentane snelheid te berekenen.

Eerdere studies rapporteren dat er conceptuele problemen zijn (Bezuidenhout, 1998; Orton, 1983; Zandieh, 2006) en welke dat zijn. Daarentegen blijkt uit mijn onderzoek dat deze problemen niet persistent zijn bij onderwerpen die herhaald terugkeren en die een vervolg hebben in het curriculum.
Tegelijkertijd zijn er ook problemen die bij enkele leerlingen tot en met interview 4 blijven optreden. Leerlingen die de afgeleide eenzijdig als snelheid interpreteren worden hierdoor tot en met het laatste interview gehinderd bij opdrachten waarin de tijd niet de onafhankelijke variabele is.

8.1.6 De rol van de grafische rekenmachine

De houding van de docent ten opzichte van de rekenmachine blijkt de keuze voor een procedure te beïnvloeden (Herman, 2007; Kendal, 2001). Op school A behandelt de docent opties van de grafische rekenmachine om de helling in één punt te vinden. Eén leerling van school A gebruikt structureel dergelijke opties om opdrachten op te lossen. Andere leerlingen gebruiken de rekenmachine wel om aan de hand van de grafiek de situatie te analyseren, maar de rekenmachine-opties zijn geen onderdeel van hun repertoire.
Op school B benadrukt de wiskundedocent dat antwoorden algebraïsch berekend dienen te worden. De rekenmachine mag worden gebruikt om antwoorden te controleren. Dit lijkt leerlingen te beïnvloeden, aangezien de rekenmachine-opties door leerlingen nauwelijks worden gebruikt. Uitzondering is Otto die in interview 2 veelvuldig de optie 'Tangent' gebruikt. Hij vertelt dat hij deze rekenmachine-optie van zijn bijlesdocent heeft geleerd.
Uit het onderzoek blijkt dat het plotten van grafieken leerlingen ondersteunt bij het verkennen van de opdracht, maar dat de meeste leerlingen geen opties van de rekenmachine gebruiken om de helling in een punt te berekenen.

Enkele leerlingen herinneren zich in de eerste drie interviews wel de rekenmachine-opties, maar weten niet precies welke combinatie van knoppen nodig was. Dit sluit aan bij het onderzoek van Berry en Graham (2005) die rapporteren dat leerlingen vaak de behandelde rekenmachine-opties niet gebruiken. Wel blijkt dat bij enkele leerlingen, als hun conceptueel begrip toeneemt, de rekenmachine-opties onderdeel van hun repertoire worden.

8.1.7 Beantwoording van de onderzoeksvragen

In deze paragraaf worden de deelvragen en de hoofdvraag van dit onderzoek beantwoord.

Deelvraag 1: Hoe is de ontwikkeling in de breedte en samenhang van het repertoire?

Uit het onderzoek blijkt dat negen van de tien leerlingen over een breder en meer samenhangend repertoire gaan beschikken. In hun ontwikkeling gaan ze meer procedures gebruiken, zetten deze vaker bij verschillende opdrachten in en leggen steeds beter relaties tussen procedures.

Een patroon in de resultaten is:

- In eerste instantie worden overwegend grafische procedures gebruikt.
- Vervolgens worden symbolische en grafische procedures gebruikt en aan elkaar gerelateerd.
- Numerieke procedures worden niet veel gebruikt en het gebruik ervan neemt af.
- Ten slotte krijgen de meeste leerlingen een voorkeur voor symbolische procedures. Een deel van deze leerlingen gebruikt uiteindelijk de niet-symbolische procedures niet meer als alternatief omdat ze deze procedures onnauwkeurig vinden.

Dit patroon beschrijft een overeenkomst in de ontwikkeling van breedte en samenhang van repertoire, maar in het onderzoek blijken grote verschillen tussen leerlingen zichtbaar in de ontwikkeling en de uiteindelijke breedte van het repertoire. Bijvoorbeeld:

- De meeste leerlingen relateren symbolische en grafische procedures steeds beter, maar enkele leerlingen combineren andere procedures (numeriek-symbolisch, rekenmachine-opties en grafisch).
- De meeste leerlingen gebruiken procedures die in de les zijn geïntroduceerd in het daaropvolgende interview niet of beperkt. Pas in een later interview zijn ze onderdeel van het repertoire geworden. Echter, enkele leerlingen nemen recent geïntroduceerde procedures direct in hun repertoire op en passen deze toe in het daaropvolgende interview.
- De meeste leerlingen relateren de bij natuurkunde behandelde raaklijnmethode op den duur aan procedures die bij wiskunde behandeld

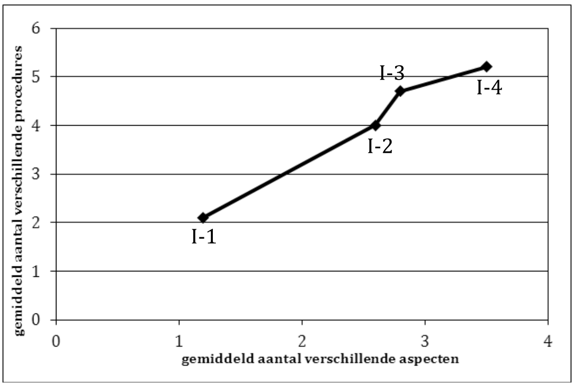
zijn, maar enkele leerlingen gebruiken de raaklijnmethode enkel in fysische situaties.

- Het gebruik van kinematicaformules en economieformules blijft bij de meeste leerlingen geïsoleerd van de procedures die bij wiskunde behandeld zijn, maar enkele leerlingen leggen deze relaties uiteindelijk wel (zie 8.1.5).
- Na interview 4 zijn drie groepen te onderscheiden: vier leerlingen ontwikkelen een breed en samenhangend repertoire, vijf leerlingen een smal maar samenhangend repertoire en één leerling een smal en onsamenhangend repertoire (zie 7.3.4).

Deelvraag 2: Hoe is de ontwikkeling in het gebruik van representaties en het noemen en aan elkaar relateren van aspecten van het concept afgeleide?
In interview 1 wordt de symbolische representatie in verhouding het meest gebruikt omdat leerlingen berekeningen proberen uit te voeren met de gegeven formules. Na de introductie van de differentiaalrekening vóór interview 2 is er ten opzichte van interview 1 vooral een toename in het gebruik van de grafische representatie. De meest genoemde aspecten in interview 2 zijn de grafische aspecten 'steilheid' en 'richtingscoëfficiënt'. Daarnaast wordt het aspect 'snelheid' vaak genoemd. In de symbolische representatie is in interview 2 geen toename ten opzichte van interview 1 waar te nemen, hoewel in het voorafgaand onderwijs juist aandacht is besteed aan symbolisch differentiëren en het berekenen van differentiequotiënten. Vervolgens neemt in de loop van vwo 5 en 6 het gebruik van de symbolische representatie toe. Dit blijkt vooral door een toenemend gebruik van symbolisch differentiëren. Enkele leerlingen noemen in interview 3 en 4 het symbolische aspect 'deling van delta y door delta x'. Het gebruik van de grafische representatie en het noemen van grafische aspecten blijft ongeveer gelijk in de loop van vwo 5 en 6. De numerieke representatie wordt steeds minder gebruikt in de opeenvolgende interviews. Leerlingen gebruiken soms een gegeven tabel of noemen een numeriek aspect als 'toename' of 'toename per eenheid'. De ontwikkeling in het gebruik van representaties vertoont overeenkomsten met de ontwikkeling in de gekozen procedures. Dit is een gevolg van het gegeven dat de gebruikte procedures onderdeel zijn van de berekening van het representatiepercentage.
Drie leerlingen noemen in de interviews weinig aspecten van het concept afgeleide. Bij de zeven andere leerlingen is een toename in genoemde aspecten van het concept afgeleide te zien. Hierin is een patroon zichtbaar waarin eerst één aspect van het concept afgeleide aan één opdracht gerelateerd wordt, terwijl in een later stadium bij een opdracht meerdere aspecten genoemd worden die bij verschillende opdrachten herhaald worden. Leerlingen die meerdere aspecten aan elkaar relateren, construeren vaker relaties tussen situaties.

Ook bij het noemen van aspecten zijn verschillen in ontwikkeling tussen leerlingen geobserveerd. Er zijn leerlingen die weinig aspecten noemen, leerlingen die vooral grafische aspecten noemen en andere leerlingen die een voorkeur hebben voor het redeneren over ‘snelheid’. Bij de meeste leerlingen treedt een versterking op voor een bepaalde voorkeur van een aspect maar enkele leerlingen veranderen hun voorkeur in de loop van de interviews (zie 7.4.3). Daarnaast verschilt het moment waarop leerlingen overeenkomsten tussen situaties construeren doordat ze aspecten aan elkaar relateren. Sommigen doen dit al in interview 1, terwijl één leerling tot en met interview 4 geen overeenkomsten tussen de in opdrachten beschreven situaties ziet.

Hoofdvraag: Hoe is in de loop van vwo 4, 5 en 6 de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept?
In de loop van vwo 4, 5 en 6 beschikken leerlingen gemiddeld genomen over een breder repertoire en noemen ze meer verschillende aspecten van het concept afgeleide. Dit is weergegeven in figuur 8.1 waarin per interview het gemiddeld aantal verschillende procedures (tabel 7.6) is uitgezet tegen het gemiddeld aantal verschillende aspecten (tabel 7.8). Hieruit blijkt dat er in de loop van vwo 4, 5 en 6 een toename in wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide plaatsvindt. Er zijn echter grote verschillen in de ontwikkeling van individuele leerlingen.
Uit kwalitatieve analyses van gebruikte procedures en genoemde aspecten blijkt dat naast de breedte van het repertoire ook de samenhang van het repertoire toeneemt en aspecten beter aan elkaar gerelateerd worden.



Figuur 8.1 Het verband tussen het gemiddeld aantal verschillende procedures en het gemiddelde aantal verschillende aspecten voor de vier interviews.

Uit figuur 8.1 blijkt dat van interview 1 naar interview 2 de grootste toename in zowel gemiddelde aantal verschillende procedures als gemiddelde aantal verschillende aspecten optreedt. Tussen deze twee interviews is de differentiaalrekening geïntroduceerd. Tijdens de introductie maken leerlingen kennis met diverse symbolische, grafische en numerieke procedures en

aspecten (zie tabel 5.1 en 5.2). In interview 2 is vooral een toename zichtbaar van het gebruik van de grafische representatie.
Na de eerste introductie komt de nadruk bij de behandeling van de differentiaalrekening te liggen op symbolische procedures toegepast in een smalle klasse van opdrachten en wordt een beperkt aantal aspecten genoemd in de behandeling van de differentiaalrekening. Uit het onderzoek blijkt dat na herhaling en uitbreiding van de differentiaalrekening de toename van het noemen van verschillende aspecten en het gebruiken van procedures gering is (van I-2 naar I-3 en van I-3 naar I-4). De meeste leerlingen krijgen een voorkeur voor de symbolische representatie, waarbij enkele leerlingen niet-symbolische procedures niet meer als alternatief gebruiken. Wel is er gemiddeld genomen meer samenhang tussen procedures en aspecten van het concept afgeleide.
De analyses van de individuele leerlingen laten zien dat de bovengenoemde ontwikkeling een gemiddelde is en dat er grote onderlinge verschillen zijn. Deze verschillen betreffen bijvoorbeeld het beschikken over een smal of breed repertoire (figuur 7.5), de voorkeur voor de symbolische of grafische representatie (figuur 7.7), het wel of niet noemen van veel aspecten (tabel 7.8), het vertonen van een continue of een op en neer gaande ontwikkeling (zie bijvoorbeeld figuur 7.4) en de periode waarin de ontwikkeling het grootst is.

8.2 Reflectie op het onderzoek

In deze paragraaf reflecteer ik op de theoretische uitgangspunten en de opzet van dit onderzoek: het model van wiskundige bekwaamheid zoals beschreven door Kilpatrick e.a. (2001) (8.2.1), het afgeleideschema (8.2.2), het gekozen transferperspectief (8.2.3), de opzet van het onderzoek (8.2.4) en de generaliseerbaarheid van het onderzoek (8.2.5).

8.2.1 Het model voor wiskundige bekwaamheid

De vijf componenten van wiskundige bekwaamheid

Het door Kilpatrick e.a. (2001) beschreven model van wiskundige bekwaamheid is ruim geformuleerd. Het bevat naast het 'conceptueel begrijpen' en het 'procedureel vloeiend werken' nog drie andere componenten, te weten 'adaptief redeneren', 'strategisch competent zijn' en 'een productieve houding hebben'. Aangezien de drie laatstgenoemde componenten meer algemeen wiskundige bekwaamheden betreffen en niet specifiek zijn voor het concept afgeleide heb ik gekozen voor operationalisering van de eerste twee componenten 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken'.
Uit de opdracht-gebaseerde interviews blijken onderdelen van de drie andere componenten echter wel een belangrijke rol te spelen. Sommige leerlingen passen heuristieken toe. Sommige leerlingen passen controlestrategieën toe

tijdens het oplossen van een opdracht zoals schatten en vergelijken met andere uitkomsten binnen een opdracht. Sommige leerlingen vertonen creativiteit tijdens het oplossen van opdrachten. Daarnaast komen verschillen in algemene studiehouding en ook in inzet voor wiskunde, natuurkunde en economie naar voren. Deze onderdelen uit de drie andere componenten zijn echter niet geanalyseerd. In een vervolgonderzoek zou op basis van een operationalisering van alle vijf componenten de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid breder onderzocht kunnen worden.

Verwevenheid van de conceptuele en de procedurele component

Kilpatrick e.a. (2001) benadrukken de onderlinge verwevenheid van de componenten. Om dit te illustreren vergelijk ik de beschrijvingen van 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken' met betrekking tot de relaties tussen verschillende procedures. Een onderdeel van 'conceptueel begrijpen' is dat "*students see the connections among concepts and procedures*" (p.119) terwijl in de beschrijving van 'procedureel vloeiend werken' staat: "*it also supports the analysis of similarities and differences between methods of calculating*" (p.121). Hoewel de uitspraken verschillend geformuleerd zijn, gaat het in beide gevallen om relaties (verschillen en overeenkomsten) tussen procedures. Het relateren van bijvoorbeeld de raaklijnmethode aan het symbolisch differentiëren zou, gezien de bovenstaande beschrijving, zowel onder 'conceptueel begrijpen' als onder 'procedureel vloeiend werken' kunnen vallen.

Het onderscheid tussen 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken' is vooral een verschil in accent tussen beide componenten. Het is in mijn onderzoek zinvol gebleken 'procedureel vloeiend werken' en 'conceptueel begrijpen' als afzonderlijke componenten te onderscheiden en beschrijven. Deze beschrijvingen hebben geresulteerd in een overzicht van indicatoren voor beide componenten (zie tabel 2.1).

Uit het onderzoek blijkt echter dat het niet mogelijk is deze componenten in de ontwikkeling van leerlingen te scheiden. Dit is in lijn met onderzoek van Rittle-Johnson en Alibali (1999) die aantonen dat conceptuele en procedurele kennis zich in samenhang ontwikkelen. Ook Newton, Star en Lynch (2010) kiezen in hun onderzoek een standpunt waarin het flexibel oplossen van problemen gezien wordt als een resultaat van het samensmelten van procedurele en conceptuele kennis.

Wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide

Kilpatrick e.a. (2001) passen hun model toe op verschillende onderdelen van wiskunde zoals rekenen, algebra, meetkunde en statistiek. Uit dit onderzoek blijkt dat het model ook bruikbaar is om wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide te analyseren.

Het concept afgeleide, zoals weergegeven in het afgeleideschema, is een complex concept bestaande uit verschillende aspecten, procedures en lagen. Mijn operationalisering van 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken' in zichtbaar gedrag maakt het mogelijk de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide te analyseren.

Het model voor wiskundige bekwaamheid van Kilpatrick e.a. (2001) is ontwikkeld op basis van onderzoeken naar rekenen en wiskunde. In mijn onderzoek is voor een breder perspectief gekozen omdat in mijn onderzoek ook het leggen van relaties tussen wiskunde en andere schoolvakken als onderdeel van wiskundige bekwaamheid geanalyseerd is. Voor het leggen van deze relaties blijkt dat het belangrijk is over een breed repertoire te beschikken, veel aspecten te kunnen noemen en meerdere representaties te kunnen gebruiken. Bij wiskunde blijkt de symbolische representatie op den duur een centrale en soms eenzijdige rol te spelen, terwijl in bepaalde onderdelen van de wiskunde, natuurkunde of economie juist het redeneren op basis van metingen, grafieken, tabellen of grafische en numerieke uitkomsten van modellen belangrijk is. Een eenzijdige nadruk op het symbolisch manipuleren kan tot gevolg hebben dat leerlingen relaties met parallelle grafische of numerieke procedures en aspecten niet meer noemen of gebruiken.

Om wiskunde toe te kunnen passen in andere vakken of vakgebieden blijken alle door mij beschreven indicatoren van belang:

- Het beschikken over een breed maar vooral samenhangend repertoire. In mijn onderzoek zijn de termen breed (zes of meer procedures) en smal (vijf of minder procedures) gebruikt als dichotomie. Echter, leerlingen met een smal maar samenhangend repertoire blijken in veel berekenopdrachten tot adequate oplossingsprocedures te komen. Deze tweedeling blijkt daarom te weinig onderscheidend.
- Het gebruiken van meerdere representaties. Vooral de relatie tussen de symbolische en de grafische representatie blijkt belangrijk te zijn voor het adequaat oplossen van opdrachten. In bepaalde opdrachten kan het relateren van deze twee representaties aan de numerieke representatie leiden tot adequatere berekeningen en redeneringen.
- Het noemen en aan elkaar relateren van meerdere aspecten van het concept afgeleide. In mijn onderzoek blijkt dat aspecten als 'steilheid', 'richtingscoëfficiënt' en 'snelheid'. Leerlingen die deze aspecten aan elkaar relateren hebben daar baat bij tijdens het kiezen van adequate oplossingsmethoden en het herkennen van overeenkomsten tussen situaties. Minder genoemde aspecten als 'delta *y* gedeeld door delta *x*' of 'toename per eenheid' blijken ook een brugfunctie te kunnen vervullen tussen verschillende situaties.

8.2.2 Het afgeleideschema

Het afgeleideschema (zie hoofdstuk 3) heeft als uitgangspunt gediend voor de analyses in dit onderzoek. In deze paragraaf wordt ingegaan op de bruikbaarheid van dit schema als analyse-instrument.

Afgeleideschema als analyse-instrument

Het afgeleideschema bleek in dit onderzoek een geschikt instrument te zijn voor de analyse van de verschillende aspecten en procedures die onderdeel zijn van wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. Het schema bood overzicht, mede doordat raakvlakken met onderwerpen uit andere schoolvakken in het schema zijn opgenomen. Het is uit te breiden naar andere onderwerpen uit schoolvakken zoals ‘reactiesnelheid’, ‘radioactief verval’ of ‘spanning’. Daarmee is het schema een aanvulling op analysekaders zoals beschreven door Zandieh (1997) en Kendal (2001).

Omdat het afgeleideschema uitgebreid is en veel relaties mogelijk zijn tussen aspecten, procedures en lagen, is in mijn onderzoek ingezoomd op delen van het afgeleideschema. De instrumenten die in dit onderzoek gebruikt zijn, hadden vooral tot doel inzicht te krijgen in de breedte en de samenhang van het repertoire van leerlingen en daarnaast in het gebruik van representaties en aspecten van het concept afgeleide. Het analyseren van bijvoorbeeld proces-object-dualiteiten was niet het doel van de opdrachten. Daarvoor zouden andere opdrachten moeten worden gebruikt en een andere interviewaanpak moeten worden gehanteerd.

Elke kolom in het afgeleideschema bestaat uit vier lagen. Bij de introductie van de differentiaalrekening bij wiskunde worden deze lagen vaak opeenvolgend behandeld. Eerst komt het differentiequotiënt aan de orde, dan het differentiaalquotiënt en ten slotte de afgeleide functie. Uit de opzet van het afgeleideschema mag echter niet worden geconcludeerd dat de vier lagen ook vier niveaus van kennisontwikkeling zijn. Zandieh (1997) constateert dat de lagen in het afgeleideschema in eerste instantie onafhankelijk van elkaar geleerd worden en dat elk object van het concept afgeleide toegepast kan worden zonder voorkennis van onderliggende processen (zie paragraaf 3.2). Ook Häkiöniemi (2006) constateert dat leerlingen de afgeleide in één punt en de afgeleide functie al in een vroeg stadium van het leerproces als object beschouwen, terwijl het onderliggende proces niet wordt gekend. Bij leerlingen blijkt geen hiërarchie zichtbaar in het leren van de opeenvolgende lagen. Daarom blijkt de door mij in hoofdstuk 4 geïntroduceerde en in hoofdstuk 6 en 7 gebruikte aanduiding ‘laag 2-’, ‘laag 3-’ of ‘laag 4-procedure’ niet goed bruikbaar voor het beschrijven van de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid.

Het snelheidsaspect

Het blijkt dat het fysische begrip ‘snelheid’ in mijn onderzoek een dubbele rol heeft. De leerlingen die uitspreken dat “*de afgeleide de snelheid is*” of spreken over “*de snelheid waarmee iets toeneemt*” noemen of gebruiken meestal niet dat de afgeleide van een formule voor de afgelegde weg een formule voor de snelheid oplevert. Deze leerlingen leggen wel een relatie tussen het aspect ‘snelheid’ en het wiskundige concept ‘afgeleide’, maar dit resulteert niet in het leggen van een relatie tussen formules voor afgelegde weg en formules of grafieken voor snelheid. Daarmee is het spreken over het aspect ‘snelheid’ niet altijd rechtstreeks gekoppeld aan de kinematicakolommen van het afgeleideschema. Het aspect ‘snelheid’ lijkt zowel equivalent te zijn aan het in Engelstalige landen gebruikte ‘speed’ en ‘velocity’ als ook aan ‘rate of change’. Het blijkt dus dat het aspect ‘snelheid’ moeilijk is in te passen in het afgeleideschema.

Het wiskundige perspectief van het afgeleideschema

In het afgeleideschema zijn fysische concepten als bijvoorbeeld ‘snelheid’ en ‘versnelling’ en een economisch concept als ‘marginale kosten’ opgenomen als kolommen parallel aan wiskundige representaties. De invalshoek van dit onderzoek is echter de bekwaamheid in *wiskunde*. De bekwaamheid van leerlingen zou ook vanuit natuurkundig of economisch perspectief geanalyseerd kunnen worden. Basson (2002) analyseert bijvoorbeeld de kennis van leerlingen van het natuurkundige concept ‘versnelling’. In het door haar ontwikkelde analysekader zijn ‘afgeleide’ en ‘rate of change’ een relatief klein onderdeel van het concept ‘versnelling’. Ook de kennis van een leerling van een economisch concept als ‘marginale kosten’ zou vanuit economisch perspectief geanalyseerd kunnen worden. Om dit laatste te illustreren: vanuit wiskundig perspectief is het differentiequotiënt op een klein interval (laag 2) een benadering van de waarde van de afgeleide (laag 3) (bij continue en differentieerbare functies), terwijl in de economie de waarde van de afgeleide van de totale kosten (laag 3) een benadering is van de marginale kosten (laag 2). Dit voorbeeld maakt duidelijk dat de economische kolom weliswaar overeenkomsten heeft met de wiskundige representaties, maar vanuit wiskundig perspectief is opgezet.

8.2.3 Perspectief op transfer en op het construeren van relaties tussen situaties

In publicaties over differentiaalrekening wordt soms opgemerkt dat er bij leerlingen geen transfer optreedt tussen schoolvakken (zie paragraaf 1.1). Daarmee wordt bedoeld dat leerlingen de kennis die verworven is bij het ene schoolvak niet toepassen bij een ander schoolvak. Het woord ‘transfer’ in bovenstaande uitspraak is gebaseerd op de traditionele definitie van transfer als ‘kennis geleerd in de ene situatie toepassen in een nieuwe situatie’ (zie paragraaf 2.4). Deze benadering van transfer wordt in de literatuur aangeduid als een cognitivistisch perspectief (Greeno, 1997) of traditionele transfer (Lobato, 2003).

Dit perspectief heeft echter diverse bezwaren. Lobato en Siebert (2003) noemen als bezwaar dat deze vorm van transfer is gebaseerd op de kennis van experts in plaats van de persoon die in een situatie handelt. Zij verwoorden dit als: "*traditional transfer is the subject's re-application of overt actions in situations that the researcher deems similar*" (Lobato & Siebert, 2002, p.89). Greeno (1997) noemt als bezwaar dat in dit transferperspectief de nadruk wordt gelegd op de kennis gerelateerd aan taken, maar dat de brede sociale context waarin kennis wordt verworven buiten beschouwing wordt gelaten.

In dit onderzoek is gekozen voor een *actorgeoriënteerd transferperspectief* (Lobato, 2002, 2003, 2006). Lobato definieert deze vorm van transfer als: "*The personal construction of relations of similarity across activities (i.e., seeing situations as the same)*" (Lobato, 2002, p.20). Kenmerken van dit perspectief zijn:

- Het gaat om de persoonlijke constructies van relaties vanuit het perspectief van de handelende persoon (actor) en niet die van de expert.
- Er wordt onderzocht welke invloed eerdere activiteiten hebben op de huidige activiteiten, en hoe actoren verschillende situaties als gelijksoortig interpreteren en niet of er verbetering optreedt in vooraf opgestelde transfertaken.
- Er wordt geanalyseerd welke relaties door leerlingen worden geconstrueerd en hoe deze worden ondersteund door de omgeving en niet onder welke condities transfer optreedt.

Dit perspectief is op twee manieren in mijn onderzoek uitgewerkt. In de eerste plaats is geanalyseerd in hoeverre leerlingen binnen één interview relaties construeren tussen opdrachten die in verschillende situaties beschreven zijn. In de tweede plaats is geanalyseerd in hoeverre leerlingen relaties noemen of gebruiken tussen procedures en aspecten die behandeld worden bij verschillende schoolvakken.

In het volgende worden eerst patronen in het construeren van relaties tussen situaties beschreven en niveaus die hierin zichtbaar zijn. Daarna wordt ingegaan op de bruikbaarheid van het actorgeoriënteerde transferperspectief.

Patronen in het construeren van relaties tussen situaties

Een situatie is in dit onderzoek opgevat als een beschrijving in een opdracht die voor leerlingen voorstelbaar is in de werkelijkheid. In mijn onderzoek wordt een aantal manieren zichtbaar waarop leerlingen relaties tussen situaties construeren.

- Leerlingen relateren verschillende aspecten aan elkaar. Leerlingen die bijvoorbeeld de aspecten 'momentane snelheid' en 'steilheid' aan elkaar relateren, gebruiken dit om relaties tussen situaties te construeren.

Daardoor lossen deze leerlingen met dezelfde procedure twee verschillende opdrachten op, namelijk één waarin de steilheid in een punt berekend moet worden en één waarin gevraagd wordt naar de momentane snelheid.

- Leerlingen relateren verschillende procedures aan elkaar. Enkele leerlingen gebruiken de raaklijnmethode en het symbolisch differentiëren als twee aan elkaar gerelateerde procedures om een momentane verandering te berekenen. Ze gebruiken deze relatie ook om overeenkomsten tussen opdrachten te construeren.

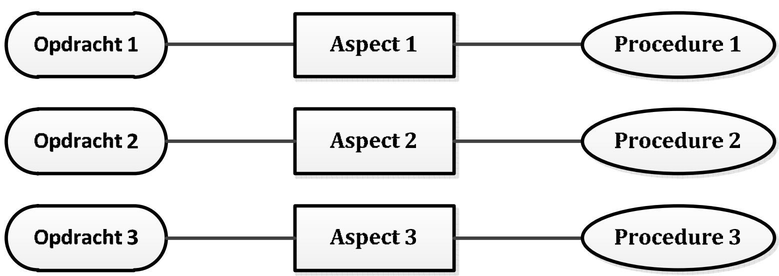
Het zien van samenhang tussen aspecten en tussen procedures lijkt daarmee een belangrijke voorwaarde voor het construeren van overeenkomsten. Leerlingen construeren vaker relaties tussen situaties als ze meerdere aspecten of meerdere procedures aan elkaar kunnen relateren. Zowel gerelateerde aspecten als procedures kunnen een brugfunctie vervullen tussen verschillende situaties. Deze constatering sluit aan bij Warners conclusie dat leerlingen een beter begrip tonen als zij in staat zijn 'hetzelfde idee' in verschillende situaties te gebruiken (Warner, 2008).

Niveaus van construeren van relaties tussen opdrachten

In het onderzoek blijken aspecten van het concept afgeleide soms een brugfunctie te vervullen tussen de verschillende situaties (zie paragraaf 7.4.2). Er zijn verschillende niveaus in het construeren van relaties tussen opdrachten waargenomen: enkele leerlingen weten veel situaties aan elkaar te relateren terwijl anderen nauwelijks of geen relaties tussen opdrachten noemen. Hieronder beschrijf ik het gedrag van leerlingen die op een laag niveau en leerlingen die op een hoog niveau opereren.

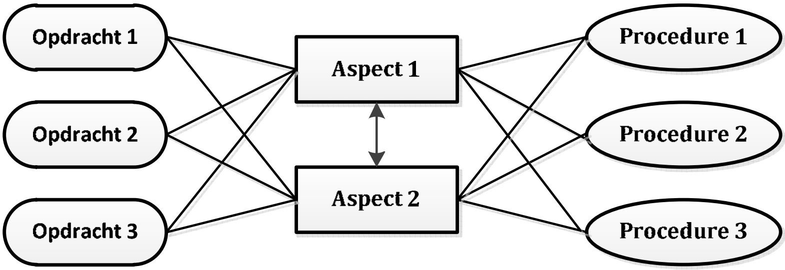
Omdat de herkenning van een bepaald aspect in een opdracht leidt tot de keuze van een procedure, kunnen aspecten opgevat worden als een schakel tussen opdrachten en procedures.

Leerlingen op een *laag niveau* herkennen bij elke opdracht één aspect en op basis daarvan kiezen ze voor één (al dan niet adequate) procedure (zie figuur 8.2).



Figuur 8.2 laag niveau van het construeren van relaties tussen opdrachten

Leerlingen op een *hoog niveau* zien dat het in verschillende opdrachten om dezelfde aspecten gaat, relateren meerdere aspecten en meerdere procedures aan elkaar en voeren meerdere adequate procedures uit (zie figuur 8.3).
Tussen het lage en het hoge niveau is een variatie aan niveaus zichtbaar waarin het aantal gerelateerde aspecten of het aantal gerelateerde procedures varieert.



Figuur 8.3 Hoog niveau van het construeren van relaties tussen opdrachten

Uit het onderzoek blijkt dat veel leerlingen in interview 1 opereren op het lage niveau. In interview 2 opereren leerlingen op een hoger niveau omdat ze meerdere aspecten noemen. Meer leerlingen herkennen dat bij verschillende opdrachten dezelfde procedures gebruikt kunnen worden. Vaak worden relaties tussen procedures en aspecten nog niet expliciet genoemd. De meeste leerlingen komen op een hoger niveau doordat ze in hun ontwikkeling meer procedures en aspecten aan elkaar relateren en zekerder zijn van gelegde relaties. Enkele leerlingen bereiken in het derde of vierde interview een hoog niveau, hoewel bepaalde procedures nog geïsoleerd blijven.
Er vindt dus een ontwikkeling plaats waarin procedures en aspecten in eerste instantie geïsoleerd van elkaar functioneren en later meer aan elkaar gerelateerd worden. Bij de meeste leerlingen treedt in de loop van de interviews een verschuiving op van het lage niveau in de richting van het hoge niveau.

Actorgeoriënteerde transfer
Het actorgeoriënteerde transferperspectief (Lobato, 2003) is voor een deel bruikbaar gebleken als theoretisch model in mijn onderzoek. Vooral het kenmerk ‘persoonlijke constructies van relaties tussen situaties’ is in de resultaten van mijn onderzoek terug te vinden, zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.
Een leerling vraagt zich af of hij iets wat hij bij natuurkunde geleerd heeft, ook bij wiskunde mag toepassen. Andere leerlingen relateren een economische opdracht aan het fysische snelheidsbegrip. Een leerling interpreteert de afgeleide als toename per eenheid en construeert op basis van dit aspect relaties tussen situaties (mogelijk gebaseerd op het concept marginale kosten uit de economielessen). Enkele leerlingen construeren relaties op basis van

grafische aspecten als ‘richtingscoëfficiënt’ en ‘steilheid’, terwijl voor andere leerlingen vooral het aspect ‘snelheid’ een brugfunctie vervult.
Volgens Lobato (2003) kijken onderzoekers die werken volgens het actorgeoriënteerde transferperspectief naar de invloed van eerdere activiteiten op de huidige activiteiten. In mijn onderzoek is gezocht naar de invloed van de onderwijscontext op de wiskundige bekwaamheid van leerlingen. Leerlingen leggen soms relaties tussen situaties van de opdrachten en de behandelde onderwerpen bij wiskunde, natuurkunde of economie. In mijn onderzoek heb ik voor een beperkte interpretatie gekozen voor het begrip ‘activiteiten’. In het actorgeoriënteerde transferperspectief wordt onder ‘activities’ en ‘situations’ de gehele, brede context verstaan waarin kennis is verworven. Bijvoorbeeld, bij het toepassen in natuurkunde van kennis die bij wiskunde is verworven zal een breed spectrum van mogelijke kenmerken van de situatie een rol spelen, zoals het lokaal waar iets geleerd wordt, de sociale omgeving, de gebruikte taal, de opvattingen van de docent. De invloed van dergelijke ‘eerdere activiteiten’ op huidige activiteiten is door mij niet structureel onderzocht.
De context waarin kennis wordt verworven is voor een onderzoeker moeilijk precies te beschrijven. Een voorbeeld hiervan is de opmerking van een leerling die constateert dat twee formules met elkaar te maken hebben omdat ze zich herinnert dat ze op dezelfde bladzijde in het boek staan. Dergelijke kleine details in de ‘activiteit’ kunnen al van invloed zijn op geconstrueerde relaties in latere activiteiten.
In mijn onderzoek blijken leerlingen beter in staat tot het construeren van overeenkomsten tussen opdrachten als zij aspecten en procedures aan elkaar kunnen relateren. In vervolgonderzoek zou geanalyseerd kunnen worden of onderwijssituaties die leerlingen stimuleren dergelijke relaties te verwoorden en te gebruiken, deze leerlingen positief beïnvloeden in het zelf construeren van relaties tussen situaties.

8.2.4 De onderzoeksopzet

Beschrijvende longitudinale casestudie

Problemen met het toepassen van kennis uit het ene schoolvak in het andere schoolvak worden al lang gesignaleerd (zie paragraaf 1.1). Om een dieper inzicht te krijgen in de aard van deze problemen heb ik gekozen voor een beschrijvende casestudie. Zoals blijkt uit mijn studie zijn er bepaalde procedures die bij verschillende schoolvakken worden behandeld, die veel leerlingen wel aan elkaar relateren. Andere bij verschillende vakken behandelde procedures functioneren geïsoleerd van elkaar. De gedetailleerde beschrijving van de geconstrueerde relaties geeft een dieper inzicht in het complexe proces van toepassen van kennis uit het ene schoolvak in het andere schoolvak. De beschrijving van de ontwikkeling van tien leerlingen in relatie met de beschreven onderwijscontext levert aanwijzingen op voor het onderwijs in het concept afgeleide bij verschillende schoolvakken (zie paragraaf 8.3).

Ik heb gekozen voor een longitudinale opzet waarbij gegevens verzameld werden in de periode van klas vwo 4 tot en met klas vwo 6. Hierin wijkt mijn onderzoek af van andere onderzoeken naar het concept afgeleide. Deze longitudinale opzet geeft inzicht in de persoonlijke ontwikkeling van leerlingen en maakt het mogelijk de ontwikkeling in uitspraken en handelingen van leerlingen in de loop van de tijd te volgen. Het longitudinaal onderzoek maakt het mogelijk de individuele ontwikkeling te vergelijken met de gemiddelde ontwikkeling van leerlingen, zoals weergegeven in figuur 8.1 (zie paragraaf 8.1.7).

Het longitudinale aspect brengt ook complicaties met zich mee. Tussen het eerste en het laatste interview kregen leerlingen les van verschillende docenten. Dit bemoeilijkt de verklaring van geobserveerd gedrag. Daarnaast moeten de opdrachten die herhaald terugkeren in de verschillende interviews zo geconstrueerd worden dat ze zowel in vwo 4 als in vwo 6 opgelost kunnen worden. Doordat de onderzochte leerlingen tijdens de vier interviews gewerkt hebben aan opdrachten die betrekking hebben op het concept afgeleide, kan de ontwikkeling van leerlingen mogelijk beïnvloed zijn door de deelname aan dit onderzoek.

Om in deze onderzoekssetting validiteit van de conclusies te waarborgen is gekozen voor een validiteitsprocedure die door Creswell en Miller (2000, p.128) "*thick, rich descriptions*" genoemd wordt. Hiermee doelen zij op een uitgebreide, gedetailleerde beschrijving van de setting, de deelnemers en de thema's van het onderzoek. Het doel van deze uitgebreide en gedetailleerde beschrijvingen (zie hoofdstuk 6 en 7) is inzicht te geven in de onderzoeksetting en de mogelijkheid te bieden om resultaten en conclusies van dit onderzoek nauwkeurig te volgen (Creswell & Miller, 2000). Aan de andere kant biedt de informatie over de context en de beschrijvingen van de casussen de lezer de mogelijkheid te beslissen in hoeverre de bevindingen van dit onderzoek overdraagbaar zijn naar de eigen situatie. Dit wordt door Lincoln en Guba (2000) aangeduid met 'transferability'.

De selectie van scholen en leerlingen

De deelnemende scholen in dit onderzoek zijn niet geselecteerd op basis van hun onderwijskundige visie of gerealiseerde afstemming tussen de schoolvakken. Op beide scholen hebben veel lessen een vast patroon: de docenten leggen de leerstof uit, bespreken de huiswerkopdrachten en geven de leerlingen een deel van de les gelegenheid aan opdrachten uit het boek te werken. Deze werkwijze komt volgens een grootschalig onderzoek veel voor in de tweede fase van het voortgezet onderwijs in Nederland (Korpershoek, Kuyper & Van der Werf, 2006). De geobserveerde ontwikkeling in dit onderzoek is daarmee niet beïnvloed door een keuze voor specifieke scholen die een alternatieve didactiek hebben voor het onderwijs van de differentiaalrekening.

Dit onderzoek is uitgevoerd onder leerlingen in de natuurprofielen van het vwo, omdat deze leerlingen zowel wiskunde als natuurkunde in hun pakket hebben. Van deze leerlingen heeft echter maar een klein deel ook het schoolvak economie in hun pakket. De resultaten van de relaties tussen wiskunde en economie zijn daardoor gebaseerd op een kleinere groep dan die van wiskunde en natuurkunde.

Vanwege gewenste continuïteit in het onderzoek zijn vooral gemiddelde en goede leerlingen geselecteerd. De onderzochte groep leerlingen krijgt in vergelijking met leerlingen in andere profielen en andere schooltypen de meeste uren wiskunde gedurende hun schooltijd in het voortgezet onderwijs. De patronen die gevonden zijn bij leerlingen die in dit onderzoek als gemiddeld of zwak worden aangeduid, zullen waarschijnlijk vaker voorkomen bij andere profielen in het vwo of in het havo. Bij de zwakkere leerlingen in mijn onderzoek functioneren procedures geïsoleerd en is de samenhang tussen schoolvakken beperkt.

Dit roept de vraag op hoe dergelijke zwakke leerlingen het beste begeleid kunnen worden in het wiskundeonderwijs. Een mogelijkheid is het opsporen van hiaten in kennis (bijvoorbeeld het ontbreken van het gebruik van grafische interpretaties, het betekenisloos toepassen van formules) en daar remediërend onderwijs voor aanbieden. De effectiviteit van deze remedie op het verhogen van wiskundige bekwaamheid zou onderwerp van vervolgonderzoek kunnen zijn.

De opdracht-gebaseerde interviews

De vier opdracht-gebaseerde interviews zijn in mijn onderzoek een belangrijk middel om de wiskundige bekwaamheid van leerlingen te onderzoeken. De opdrachten en de methode van interviewen zijn zo ontworpen dat uitspraken en handelingen van leerlingen veel informatie kunnen verschaffen over de breedte en de samenhang van het repertoire en de gebruikte representaties en aspecten van het concept afgeleide. Enkele opdrachten zijn zo gekozen dat ze aanleiding kunnen geven zowel tot het gebruik van procedures die behandeld zijn bij natuurkunde of economie als tot procedures die behandeld zijn bij wiskunde.

Hoewel de opdrachten in alle interviews gesteld zijn in verschillende situaties, is het onderzoek opgezet vanuit *wiskundig* perspectief. De kinematische en economische opdrachten zijn vanuit dit perspectief anders van karakter dan in een natuurkunde- of economieboek. In opdrachten in een natuurkundeboek waarin gevraagd wordt naar een valsnelheid wordt bijvoorbeeld geen formule voor de hoogte gegeven, maar moeten leerlingen op basis van de beschreven

situatie zelf beslissen welke formule ze kunnen gebruiken. In een economieboek staan geen opdrachten waarin wordt gevraagd voor welke productie de kosten en opbrengsten even snel toenemen maar wordt gevraagd voor welke productie de winst maximaal is. De antwoorden op beide vragen zijn wel sterk aan elkaar gerelateerd. Dit afwijkende karakter van de opdrachten kan tot gevolg hebben dat leerlingen veronderstellen dat ze voor het oplossen van de opdrachten de bij wiskunde behandelde procedures dienden in te zetten.
Door de interviewtechniek waarin leerlingen werden gestimuleerd meerdere procedures te gebruiken bleek dat veel leerlingen toch procedures of aspecten uit de verschillende schoolvakken benoemden. Ondanks de opzet vanuit wiskundig perspectief levert dit onderzoek veel aanwijzingen over het leerproces van het concept afgeleide en daaraan gerelateerde onderwerpen zoals die behandeld worden bij natuurkunde en economie.

De werkwijze tijdens een interview
De mogelijkheden om in dialoog met de leerling door te vragen op de gebruikte procedures of geplaatste opmerkingen, in combinatie met vooraf bedachte vervolgvragen, leverde tijdens een opdracht-gebaseerd interview rijke informatie op over de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van de leerling. De interviewer kon tijdens een interview leerlingen op hun gemak stellen, doorvragen en stimuleren als de leerling blokkeerde. Doordat er meerdere opdrachten waren, kreeg de leerling steeds de kans opnieuw te beginnen, ook als een opdracht niet lukte. Uitspraken en patronen in procedures konden diepgaand bestudeerd worden.
De gebruikte interview-methode heeft beperkingen (zie bijvoorbeeld Koichu & Harel, 2007). De één-op-één setting van een leerling met een onderzoeker in combinatie met de video-opname kan de leerlingen beïnvloeden. Een verlegen leerling laat mogelijkerwijs minder van zijn wiskundige bekwaamheid zien dat een assertieve leerling die zijn gedachten makkelijk onder woorden brengt. Sommige leerlingen zullen procedures pas noemen als ze overtuigd zijn van hun antwoord. Anderen zullen tijdens het interview alles noemen dat volgens hen van belang is. Daarnaast kan de prestatie van een leerling op één dag beïnvloed worden door vermoeidheid of door andere zaken.

Het gespreid herhalen van opdrachten
De opdrachten zijn in bepaalde interviews herhaald (zie tabel 4.5). Er is niet voor gekozen elk interview exact dezelfde opdrachten te geven. Dit zou na twee of drie interviews tot gevolg kunnen hebben dat leerlingen zich op de opgaven gaan voorbereiden of oplossingsprocedures gaan reproduceren. Door de opdrachten gespreid te herhalen was er voor de leerlingen geen voorspelbaarheid van de inhoud van het volgende interview. Wel bestond elk interview uit een vooraf opgestelde spreiding over de schoolvakken. De

opdracht *Watertanks-b* is in alle interviews gebruikt. Deze gaf veel inzicht in de ontwikkeling van het repertoire van leerlingen. De bij deze opdracht geconstateerde ontwikkeling van een leerling vertoont overeenkomsten met uitwerkingen van andere opdrachten door deze leerling. Ook andere opdrachten die herhaald gebruikt zijn, dragen bij aan de analyses van de ontwikkeling per leerling. Opdrachten die slechts in één interview gebruikt zijn, geven slechts beperkte aanvullende informatie.
Leerlingen herkenden soms dat een opdracht ook in een eerder interview was gemaakt. Dit kan mogelijk de manier van uitwerken van een opdracht beïnvloeden. Uit de resultaten blijkt echter dat veel leerlingen in de opeenvolgende interviews niet terugvielen op procedures die in eerdere interviews waren gebruikt, maar dat ze hun repertoire uitbreidden en meer aspecten gingen noemen bij dezelfde opdracht.

8.2.5 De generaliseerbaarheid van het onderzoek

De generaliseerbaarheid van de resultaten van de casestudies is een belangrijk aandachtspunt (Lincoln & Guba, 2000; Stake, 2002; Yin, 2003). Lincoln en Guba (2000) beargumenteren dat er in casestudies factoren zijn die uniek zijn voor de bestudeerde context, die niet gegeneraliseerd kunnen worden. Daartegenover doen zij de suggestie dat elk resultaat van een casestudie gezien wordt als een werkhypothese, die in zekere mate generaliseerbaar is. Die generaliseerbaarheid is afhankelijk van de overeenkomst tussen de context waar de hypothese uit is afgeleid en de context waarin het resultaat zou kunnen passen. In lijn met Lincoln en Guba wordt in mijn onderzoek verondersteld dat uitkomsten van dit onderzoek in zekere mate generaliseerbaar zijn naar onderwijscontexten die overeenkomsten vertonen met de context van dit onderzoek.
Waarschijnlijk vertoont de onderwijscontext waarin het concept afgeleide wordt behandeld op veel scholen in Nederland grote overeenkomsten met de beide scholen in dit onderzoek. Slechts zelden vindt structurele afstemming plaats tussen wiskunde, natuurkunde en economie (Tweede Fase Adviespunt – ministerie van OCW, 2005). De gebruikte schoolboeken zijn veel gebruikte methoden in Nederland en de behandelde leerstof wordt vastgelegd door eindtermen en eindexamens. Het lijkt aannemelijk dat op scholen die differentiaalrekening onderwijzen uit soortgelijke schoolboeken, zonder expliciete afstemming tussen schoolvakken, de ontwikkeling van leerlingen zal verlopen volgens vergelijkbare patronen die op beide scholen zijn waargenomen.
De verschillen tussen beide scholen maken ook duidelijk dat de ontwikkeling van leerlingen beïnvloed wordt door specifieke kenmerken van de onderwijscontext. Dit betreft bijvoorbeeld de volgorde van het natuurkunde- en wiskundecurriculum, de manier waarop de grafische rekenmachine werd

geïntroduceerd, de nadruk op het symbolisch differentiëren en de expliciete verbindingen die één natuurkunde-wiskundedocent legt. Hieruit blijkt dat in het onderwijs gelegde accenten van invloed zijn op en weerspiegeld worden in de ontwikkeling van leerlingen.
De in dit onderzoek beschreven patronen in de ontwikkeling van leerlingen kunnen bij andere onderwerpen in het wiskundecurriculum naar voren komen. Net als bij het concept afgeleide zijn bij concepten als 'integraal' of 'functie' relaties tussen representaties, procedures en aspecten en het gebruik hiervan in verschillende schoolvakken belangrijk. Het is te verwachten dat patronen die in dit onderzoek zijn waargenomen ook bij dergelijke concepten zullen optreden. Het gaat daarbij om de voorkeur voor de grafische representatie, de centrale rol van het symbolisch integreren, het beperkt gebruik van de numerieke representatie en het geïsoleerd gebruik van formules in andere schoolvakken.

8.3 Aanbevelingen voor het onderwijs

De relatie tussen de grafische, numerieke en symbolische representatie
Uit onderzoek blijkt dat de grafische representatie voor veel leerlingen een belangrijke rol speelt (zie ook Asiala e.a., 1997; Hähkiöniemi, 2006, 2008; Kendal, 2001; Zandieh, 2000). In mijn onderzoek blijkt dat leerlingen die grafische en symbolische procedures aan elkaar relateren veel opdrachten goed kunnen uitvoeren, terwijl leerlingen die grafische en symbolische procedures geïsoleerd gebruiken daar minder goed toe in staat zijn. Ook blijkt dat leerlingen die in interview 1 veel numerieke procedures gebruiken in de loop van de interviews een flexibel gebruik van symbolische, grafische en in mindere mate numerieke procedures ontwikkelen.
Het is belangrijk relaties te leggen tussen grafische, numerieke en symbolische representaties en deze regelmatig te herhalen. Herhaling en uitbreiding van representaties van het concept afgeleide resulteert in toenemende wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. In de eerste plaats geeft dit leerlingen die deze representaties niet of niet voldoende aan elkaar relateren nieuwe kansen hun 'conceptueel begrijpen' te versterken. In de tweede plaats voorkomt dit dat deze relaties voor leerlingen in de loop van het onderwijs in het vwo op de achtergrond raken. Opdrachten waarin leerlingen gestimuleerd worden gebruik te maken van verschillende representaties kunnen hieraan bijdragen, bijvoorbeeld opdrachten die niet zijn op te lossen met symbolische procedures. Dit is onder meer van belang omdat juist in fysische, chemische en economische situaties grafieken en tabellen een belangrijke rol blijven spelen. Metingen aan fysische of chemische processen zijn vaak in tabellen en grafieken weergegeven en moeten geïnterpreteerd worden zonder dat daarbij een formule gegeven is. In economische situaties

wordt gebruikt gemaakt van grafieken en tabellen (bijvoorbeeld in Excel) om gegevens samen te vatten. Naast oefening in het symbolisch differentiëren is het daarom belangrijk procedures en aspecten van het concept afgeleide in realistische situaties te leren waarin informatie gegeven is in de vorm van tabellen, grafieken of symbolen.
Daarnaast is het aan te bevelen al in de onderbouw met grafische en numerieke procedures van de differentiaalrekening te starten. Meerdere leerlingen in mijn onderzoek kunnen al snel toe- of afnames in een tabel en steilheid in een grafiek adequaat interpreteren. Deze aanbeveling sluit aan bij adviezen van Berry en Nyman (2003), Kindt (1979) en Orton (1983) om vóór de formele symbolische introductie en het trainen op differentieerregels eerst de onderliggende concepten op te bouwen in, onder andere, fysische situaties en in grafische en numerieke representaties.

> Aanbeveling 1: *Het verdient aanbeveling om al in de onderbouw te beginnen met het onderwijzen van grafische en numerieke representaties van gemiddelde verandering en momentane verandering in wiskundige en realistische situaties. Daarbij dienen ook voor leerlingen toegankelijke aspecten als 'steilheid', 'helling', 'toename' en 'verandering' gebruikt te worden. In de bovenbouw, na de introductie van de symbolische representatie, zouden relaties tussen grafische, numerieke en symbolische representaties herhaald moeten worden, bijvoorbeeld door opdrachten te gebruiken die een beroep doen op elk van de drie representaties.*

Het noemen en gebruiken van meerdere aspecten

Naast relaties tussen representaties en procedures is ook het noemen van meerdere aspecten van het concept afgeleide van belang. Leerlingen die meerdere aspecten aan elkaar kunnen relateren lossen in mijn onderzoek verschillende situaties met dezelfde procedures op. Zij zien dat het om hetzelfde aspect van het concept afgeleide gaat in opdrachten die oppervlakkig gezien verschillend zijn. Aspecten vervullen daarmee een brugfunctie tussen verschillende situaties. Het gebruik van opdrachten die gebaseerd zijn op verschillende situaties kan bijdragen aan een gebruik van een grote variatie van aspecten (zie ook Weitendorf, 2007).
Het eenzijdig gebruik maken van bijvoorbeeld het aspect 'snelheid' hindert leerlingen in situaties waarin tijd niet de onafhankelijke variabele is. Door in de betreffende situatie over te schakelen naar aspecten als 'steilheid', 'toename per eenheid' of 'delta y gedeeld door delta x' kunnen leerlingen toegang krijgen tot andere interpretaties of oplossingsprocedures. Evenzo kunnen leerlingen baat hebben bij het leggen van relaties met andere aspecten bij het redeneren over grafische aspecten als 'steilheid' of 'richtingscoëfficiënt'.
Het is hierbij van belang dat docenten kunnen identificeren welke aspecten bij een leerling centraal staan in spreken en handelen. In redeneeropdrachten

zoals *Remweg* of *Benzine* blijken voorkeursaspecten van leerlingen naar voren te komen. Dergelijke redeneeropdrachten kunnen docenten inzicht geven in voorkeursaspecten maar ook in het ontbreken van andere aspecten in redeneringen van leerlingen.
Daarnaast is het van belang dat in het onderwijs aandacht gegeven wordt aan het correct en diepgaand relateren van aspecten aan elkaar. Geëxpliciteerde relaties lijken op basis van aantekeningen van leerlingen een oppervlakkig karakter te hebben, zoals "*de afgeleide is de snelheid*", "*v(t) is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn*"(zie figuur 5.7). Ook bleek dat uitspraken van leerlingen zoals: "*de afgeleide is de raaklijn*" of "*de afgeleide functie is de richtingscoëfficiënt*" soms gebaseerd zijn op een onvolledig begrijpen van genoemde aspecten. Relaties tussen aspecten worden wel door docenten genoemd, maar uit analyse van de schriften van leerlingen blijkt dat er geen opdrachten over gemaakt worden of dat er niet verder op wordt ingegaan.
Het verdient aanbeveling dat docenten en schoolboeken relaties tussen aspecten herhaald expliciteren, dat ze correct zijn in het leggen van relaties tussen aspecten en tenslotte dat ze in verwerkingsopdrachten leerlingen stimuleren zelf de genoemde relaties tussen aspecten te construeren.
Het is bijzonder dat het aspect '*rate of change*' in het Engelstalig gebied een centrale rol vervult, terwijl in de Nederlandse context geen vertaling beschikbaar lijkt die leerlingen houvast geeft. Een mogelijke vertaling waarin nadruk gelegd wordt op het veranderingsbegrip is de term 'mate van verandering' of 'momentane verandering'. Onderzocht zou kunnen worden of een structurele en weerkerende rol van deze term in de opbouw van de differentiaalrekening bruikbaar is om betekenissen van het concept afgeleide te verbreden.

> Aanbeveling 2: *Het laten verwoorden van de relatie tussen verschillende aspecten van het concept afgeleide in allerlei situaties versterkt het conceptueel begrijpen en flexibel gebruiken van procedures. Introductie van een neutrale, samenvattende term zoals 'momentane verandering' of 'mate van verandering', analoog aan de term 'rate of change', kan helpen allerlei situatiegebonden woorden aan elkaar te relateren. Verder onderzoek moet uitwijzen welke termen bijdragen aan toename van wiskundige bekwaamheid.*

Limietdefinitie

Uit het onderzoek blijkt dat uitspraken van leerlingen over het limietproces in de vier opeenvolgende interviews zeer beperkt en globaal zijn en dat ook blijven. Dit zou kunnen leiden tot de aanbeveling meer aandacht te gegeven aan een limietdefinitie van de afgeleide functie. Echter in mijn onderzoek beschikken leerlingen die het limietproces niet goed kunnen verwoorden wel over een breed en samenhangend repertoire. Het onderwijzen van een limietdefinitie in het curriculum van het vwo blijkt niet nodig te zijn voor het ontwikkelen van een breed, samenhangend repertoire. Mijn aanbeveling is leerlingen te laten zien dat een exacte definitie noodzakelijk en een limietdefinitie wel te noemen, maar deze definitie geen grotere plaats te geven bij de differentiaalrekening in het voortgezet onderwijs.

> Aanbeveling 3: *Het noemen van een limietdefinitie van de afgeleide functie is zinvol om leerlingen te laten zien dat een exacte definitie noodzakelijk is. Het is echter niet nodig dat een limietdefinitie een grote rol speelt in het curriculum van het vwo.*

Het gebruik van de grafische rekenmachine

Voor het onderwijs is de vraag relevant in hoeverre het werken met de grafische rekenmachine bijdraagt aan de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide. In verschillende studies wordt positief gerapporteerd over de impact van de grafische rekenmachine op het leren van wiskunde en het oplossen van wiskundige problemen (Berry & Graham, 2005, Delos Santos, 2006). Er wordt vooral gerapporteerd over de mogelijkheden om in meerdere representaties te werken. Minder vaak wordt geschreven over het gebruik van 'snelle opties' van de rekenmachine waarbij door één druk op de knop een berekening uitgevoerd wordt, zoals de opties uit het CALC-menu. Berry en Graham (2005) rapporteren dat leerlingen veel opties van de rekenmachine niet gebruiken, hoewel ze al meerdere jaren met de grafische rekenmachine werken.

In mijn onderzoek blijkt dat enkele leerlingen die in interview 1 grafieken en tabellen op de grafische rekenmachine gebruiken daar veel baat bij hebben in de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van het concept afgeleide, terwijl bij leerlingen die vanaf het begin veel 'snelle opties' gebruiken deze ontwikkeling minder goed verloopt. Aansluitend bij de resultaten van Berry en Graham (2005) blijkt dat andere leerlingen in de eerdere interviews geen 'snelle opties' gebruiken, ondanks het feit dat die wel in de les behandeld zijn. De vier leerlingen die de 'snelle opties' pas in interview 4 gaan gebruiken hebben na herhaling en uitbreiding van de differentiaalrekening meer overzicht over procedures gekregen. In dat stadium van hun leerproces worden 'snelle opties' makkelijker gekoppeld aan al bekende procedures.

Op basis van mijn onderzoek is aan te bevelen de opties in het CALC-menu in een later stadium als controlemiddel te introduceren in plaats van tijdens de introductie van de differentiaalrekening. Door in een te vroeg stadium van het leerproces 'snelle opties' van de grafische rekenmachine te behandelen, kunnen deze rekenmachine-opties de ontwikkeling van het gebruik van andere representaties en oplossingsprocedures in de weg staan.

Aanbeveling 4: *De grafische en numerieke opties van de grafische rekenmachine kunnen goed worden benut bij de introductie van de differentiaalrekening, terwijl de 'snelle opties' (het CALC-menu bijvoorbeeld) beter later als controlemiddel kunnen worden gebruikt.*

Concentrisch curriculum

In de opeenvolgende interviews blijkt dat in de les behandelde procedures in het eerstvolgende interview niet of beperkt gebruikt worden. Geïntroduceerde procedures die in de loop van het onderwijsproces herhaald en uitgebreid worden, blijken pas in latere interviews onderdeel te zijn van het repertoire. Dit geldt niet alleen voor procedures maar voor het geheel aan conceptuele en procedurele kennis van het concept afgeleide.

In het onderwijs dienen de leerlingen steeds uitgedaagd te worden hun wiskundige bekwaamheid te versterken en verder uit te breiden met nieuwe procedures en aspecten. Een concentrisch en samenhangend curriculum waarin actualisering plaatsvindt van die aspecten die de leerlingen zouden moeten beheersen, lijkt hiertoe het meest geëigend. Daarbij moet regelmatig worden teruggekomen op allerlei representaties, procedures en aspecten van het gehele afgeleideschema.

Aanbeveling 5: *Een concept zoals de afgeleide dient volgens een concentrisch curriculum aangeboden te worden, want nieuw geïntroduceerde begrippen en procedures blijken pas na herhaling adequaat te kunnen worden gebruikt en gerelateerd aan eerder onderwezen kennis.*

Afstemming tussen de schoolvakken

Hoewel leerlingen soms relaties kunnen leggen tussen de schoolvakken, bevestigt dit onderzoek dat leerlingen kennis uit het ene schoolvak moeilijk kunnen toepassen in een ander schoolvak. In paragraaf 8.1.4 is beschreven dat kinematicaformules door de meeste leerlingen niet worden gerelateerd aan overeenkomstige wiskundemethoden, maar dat de raaklijnmethode en het differentiequotiënt bij meerdere leerlingen een brugfunctie vervullen tussen wiskunde en natuurkunde.

Goed gekozen notaties en visualisaties kunnen leerlingen helpen relaties tussen schoolvakken te leggen. Enkele voorbeelden van deze aanbeveling zijn:

a. Het behandelen van de formule voor de gemiddelde snelheid $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ heeft de voorkeur boven de formule $v = \frac{s}{t}$. De eerstgenoemde notatie maakt het leggen van een relatie met het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ makkelijker.
b. Het noteren van formules voor de snelheid als afgeleide zoals: $s' = v = g \cdot t$ of $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = g \cdot t$.
c. Het maximaliseren van winst met de procedure om de marginale kosten gelijk te stellen aan de marginale opbrengst kan genoteerd worden als MO =

MK maar ook als TO′ = TK′. Combinatie van beide notaties vergemakkelijkt het leggen van relaties tussen economieformules en wiskundeprocedures.

Een gezamenlijke opbouw van het concept afgeleide in natuurkunde en wiskunde kan de samenhang tussen de vakken versterken. In de wiskundelessen zou vanuit het begrip ‘gemiddelde verandering’ in diverse situaties (waaronder fysische en economische) toegewerkt kunnen worden naar het aspect ‘momentane verandering’ in zowel de numerieke, de grafische als de symbolische representatie. Tegelijkertijd zou in de natuurkundelessen de kinematica aan de hand van practica en opdrachten onderwezen kunnen worden. Daarbij moeten zowel bij wiskunde als bij natuurkunde relaties tussen procedures, aspecten en notaties van beide vakken geëxpliciteerd en door leerlingen in verwerkingsopdrachten zelf geconstrueerd kunnen worden.

Docenten dienen zelf kennis te hebben van relaties tussen schoolvakken, zoals bepleit in conferentiebundel van de Natuurkunde Wiskundeconferentie (NWC, 1975), door Vredenduin (1979), Biezeveld (1979), Zegers e.a. (2003), Giessen e.a. (2007) en Vos e.a. (2010). Maar deze relaties dienen ook gedetailleerd met leerlingen besproken te worden. Daarnaast is verwerking in opdrachten nodig om daarmee constructie van overeenkomsten en verschillen tussen schoolvakken te stimuleren. Een onderwijsstrategie die zich hiervoor kan lenen is de methode van ‘analogical encoding’ (Gentner, Loewenstein & Thompson, 2003). Bij deze methode vergelijken leerlingen twee voorbeelden zodat ze tot begrip van de onderliggende structuur van beide voorbeelden kunnen komen. Gentner e.a. (2003) concluderen op basis van drie analogical encoding-experimenten dat er bewijs is voor hun claim dat “*analogical encoding fosters the extraction of the common relational schema inherent in the cases and that this in turn promotes the ability to transfer the knowledge to new cases*” (p 402). Met leerlingen zouden verschillen en overeenkomsten tussen bijvoorbeeld de fysische notatie $s'(10)$ (met s is de afgelegde weg en t = 10) en de economische notatie TK′(10) (de TK is de totale kosten bij een productie van q = 10) besproken kunnen worden. Een ander voorbeeld is het vergelijken van de oplossingen van de opdrachten *Watertanks-b* en *Kogel*. Deze onderwijsstrategie wijkt af van een meer standaardmethode om kennis over een nieuwe situatie te ontwikkelen op basis van analogieën met eerder geleerde situaties. Met deze strategie worden leerlingen regelmatig gestimuleerd overeenkomsten en verschillen tussen schoolvakken te verwoorden. In een toekomstig onderzoeksproject zou onderzocht kunnen worden of dit leidt tot meer samenhangende kennis.

Aanbeveling 6*: Vaksecties van verwante schoolvakken kunnen meer wiskundige bekwaamheid bij hun leerlingen verwachten als zij een gemeenschappelijke opbouw van concepten, procedures en notaties ontwerpen.*

Bibliografie

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 41*, 627-636.

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 25-61.

Akker, J., van den (2004). Curriculum perspective: an introduction. In J. van den Akker, W. Kuiper & U. Hameyer (Eds), *Curriculum landscapes and trends.* (pp. 1-10). Dordrecht: Kluwer.

Alexander, P.A., & Murphy, P.K. (1999). Nurturing the seeds of transfer: a domain-specific perspective. *International journal of educational research, 31*, 561-576.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus. Anecdotes or the tip of an iceberg? In G. Booger, P. Cobb, and T.N. de Mendicuti (Eds), *Proceedings of the 14th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp. 3-10), Mexico.

Anderson, J.R. (1990). *Cognitive psychology and its implications* (3rd ed). New York: Freeman.

Anderson, J.R., Reder, L.M., & Simon H.A. (1996). Situated Learning and Education. *Educational Researcher, 25*(4), 5-11.

Anderson, J.R., Reder, L.M., & Simon H.A. (1997). Situative versus cognitive perspectives: Form versus substance. *Educational Researcher, 26*(1), 18-21.

Anderson L.W., & Krathwohl D.R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* New York: Longman Publishing.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*, 399-431.

Bassok, M., & Holyoak, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Memory, Learning, and Cognition*, *15*, 153-166.

Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*, 679-690.

Berry, J.S., & Nyman, M.A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, *22,* 481-497.

Berry, J.S., & Graham, T. (2005). On high-school students' use of graphic calculators in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 37*, 140-148.

Berry, J.S., Graham, E., & Smith, A. (2006). Observing student working styles when using graphic calculators to solve mathematics problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*, 291-308.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*, 389-399.

Biezeveld, H. (1979). Vragen en opmerkingen over differentialen. *Euclides, 55*, 95-99.

Biezeveld, H., & Mathot, L. (1998). *Scoop VWO natuurkunde 1 deel 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Biezeveld, H., & Mathot, L. (1999). *Scoop VWO natuurkunde 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Biezeveld, H., & Mathot, L. (2000). *Scoop VWO natuurkunde 1 deel 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68,* 19-35.

Bingolbali, E., Monaghan, J. & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*, 763-777.

Bloom, B.S., & Krathwohl, D.R. (1956) *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals, by a committee of college and university examiners. Handbook I: Cognitive domain.* NY: Longmans, Green.

Boon, A.W. e.a. (1998). *Netwerk A1 en B1 deel 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Boon, A.W. e.a. (1999). *Netwerk B1 deel 4*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Boon, A.W. e.a. (2000). *Netwerk B1 deel 5*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Braber, N.S. den (2007). *Schoolboekenanalyse; tussenrapportage van het onderzoek 'Hellingen, snelheden en marginale kosten'.* Beschikbaar van: http://www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA_763ATR. Den Haag: NWO.

Bransford, J.D., Brown, A.L., & Cocking, R.C. (Eds.) (2000). *How People Learn*. Washington D.C: National Academy Press.

Carraher, D., & Schliemann. A.D. (2002). The transfer dilemma. *The Journal of the Learning Sciences, 11*, 1-24.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundation and model viability. In A.E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo (Nina). (2006). *Natuurkunde leeft.* Amsterdam: Nederlandse Natuurkundige Vereniging.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rate of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*, 125-164.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Creswell, J.W. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. New Jersey: Merrill Prentice Hall.

Creswell J.W., & Miller, D.L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into practice, 39*, 124-130.

Davies, R.B. (2006). From cross-sectional to longitudinal analysis. In D.A. de Vaus (Ed), *Research Design, volume III* (pp.193-217). London: Sage.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* Norwoord, NJ: Ablex.

Davis, G., & Tall D. (2002). What is a scheme? In D. Tall & M.O.J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp.* Flaxton, Australia: Post Pressed

Delos Santos, A.G.G. (2006). *An investigation of students' understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment.* (Doctoral dissertation, The University of Auckland). Auckland: The University of Auckland.

Denscombe, M. (2007). *The Good Research Guide: for small-scale social research (third edition).* Maidenhead: Open University Press.

Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change.*(Doctoral dissertation, Universiteit Utrecht). Utrecht: CD-β press.

Dreyfus, T., & Eisenberg T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp.253-284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Drijvers, P. (2000). Studenten met een grafische rekenmachine: wat kunnen we van ze verwachten? *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/1*, 399-405.

Drijvers, P. (2006). Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5*/7, 198-203.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Duffin, J.M., & Simpson A.P. (2000). A search for understanding. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*, 415-427.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 105-121.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K.G. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In J.J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematics Association of America.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science 7*, 155-170.

Gentner, D., Loewenstein, J., & Thompson, L. (2003). Learning and transfer: a general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology, 95*, 393-408.

Geraerdts, C.L., Boersma, K.Th., Huijs, H.A.M., & Eijkelhof, H.M.C. (2001). *Ruimte voor SONaTe. Onderzoek naar good practice op het gebied van samenhangend onderwijs in natuur en techniek in de basisvorming.* Delft: Stichting AXIS.

Gerson, H., & Walter, J.G. (2008). Building connected understanding of calculus. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico.

Gick, M.L., & Holyoak, K.J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 15*, 1-38.

Giessen, C. van de, Hengeveld, T., Kooij, H. van der, Rijke, K., & Sonneveld, W. (2007). *Eindverslag van Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde aan vernieuwingscommissies wiskunde (cTWO) en natuurkunde (NiNa)*. Utrecht: WAWN.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Ginsburg H. (1997). *Entering the childs mind*. *The clinical interview in psychological research and practice.* Cambridge: University Press.

Goerdt, L.S. (2007). *The effect of emphasizing multiple representations on calculus students' understanding of the derivative concept*. (Doctoral dissertation, The University of Minnesota). Minneapolis: The university of Minnesota.

Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517- 545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G.A. (2002) Representation in mathematical learning. In L.N. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gray, E.M., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 115-141.

Gray, E.M., & Tall D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 23-40.

Greeno, J.G. (1997). On claim that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, *26*(1), 5-17.

Greer, B. (2009). Representational flexibility and mathematical expertise. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 41*, 697-702.

Greer, B., & Harel, G. (1998). The role of isomorphisms in mathematical cognition. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*, 5-24.

Haak, J.K. van den, & A. Pelssers (2002). *Economie in Balans VWO theorieboek 1*. Baarn: NijghVersluys.

Haak, J.K. van den, & A. Pelssers (2003). *Economie in Balans VWO theorieboek 2*. Baarn: NijghVersluys.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57-72.

Haciomeroglu, E.S., Aspinwall, L., & Presmeg, N.C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical thinking and learning, 12*, 152-176.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. (Doctoral Dissertation, University of Jyväskylä). Jyväskylä: University Printing House.

Hähkioniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge – the case of the derivative concept. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelia, Mexico: PME.

Harskamp, E.G., Suhre, C.J.M., & Streun, A. van, (1998). The graphics calculator in mathematics education: An experiment in the Netherlands. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 6*, 13-31.

Harskamp, E.G., Suhre, C.J.M., & Streun, A. van, (2000). The graphics calculator and students' solution strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 37-52.

Hatano, G. (2003). Foreword. In A.J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. xi-xiii). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hauger, G.S. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 891-897.

Heertje, A. (1971). Wiskunde en economie. *Euclides,* 47, 87-89.

Herman, M. (2007). What students choose to do and have to say about use of multiple representations in college algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26*(1), 27-54.

Hiebert, J., & Carpenter T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MPC.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.

Hove, J.R. ten (1984). Economie zonder wiskunde en wiskunde zonder economie? *Nieuwe Wiskrant, 4*(2), 41-47.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 113-122.

Kaiser-Messmer, G. (1986). Modelling in calculus instruction - empirical research towards an appropriate introduction of concepts. In J. Berry e.a. (Eds.), *Mathematical Modelling Methodology*, *Models and Micros* (pp. 36-47). Chichester: Ellis Horwood.

Kaput, J.J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 265-281.

Kendal, M. (2001). *Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system*. (Doctoral dissertation, The University of Melbourne). Melbourne: The University of Melbourne.

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. *Mathematics Education Research Journal,15* (1), 22-41.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 101-116.

Kindt, M. (1979). Differentiëren. Een manier om veranderingen bij te houden. *Wiskrant, 4* (17), 12-14.

Kneppers, L. (2010). Rekenen bij economie. *Nieuwe Wiskrant, 30*(2), 8-11.

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 349-365.

Korpershoek, H., Kuyper, H., & Werf, M.P.C. van der (2006). *Havo-5 en vwo-5 en de tweede fase: de bovenbouwstudie van de VOC'99*. Groningen: GION.

Korsunsky, B. (2002). Improper use of physics-related context in high school mathematics problems: implications for learning and teaching. *School Science and Mathematics, 102*, 107-113.

Krutetskii, V.A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (J. Teller, trans). Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire and Dangerous Things: What Categories Reveal about the Mind*. Chicago: The University of Chicago Press.

Lawson, M.J., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problemsolving, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 26-43.

Lincoln, Y.S., & Guba, E.G. (2000). The only generalisation is: There is no generalisation. In R. Gomm, M. Hammersly, & P. Foster (Eds.), *Case Study Method* (pp. 27-44). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa*. Educational Researcher, 32*(1), 17-20.

Lobato, J. (2006). Alternative perspectives on the transfer of learning: History, issues, and challenges for future research. *The Journal of the Learning of Sciences, 15*, 431-449.

Lobato J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 87-116.

Mantel, A., & Klerks, J. (2003). Economie en wiskundige vaardigheden; een probleemsignalering. *Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs, 3*, 187-192.

Marrongelle, K.A. (2001). *Physics experiences and calculus: How students use physics to construct meaningful conceptualizations of calculus concepts in an interdisciplinary calculus/physics course.* (Doctoral Dissertation, University of New Hampshire). Durham: University of New Hampshire.

Marrongelle, K.A. (2004). How students use physics to reason about calculus tasks. *School Science and Mathematics, 104*, 258-272.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 135-161.

Merriënboer, J.J.G. van., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational Psychology Review, 17*, 147-177.

Middelink, J.W. (1977). *Systematische Natuurkunde deel A voor bovenbouw vwo/havo*. Apeldoorn: Van Walraven b.v.

Middelink, J.W. e.a. (1998). *Systematische Natuurkunde N1 VWO 1*. Baarn: NijghVersluys.

Middelink, J.W. e.a. (1999). *Systematische Natuurkunde N2 VWO 1*. Baarn: NijghVersluys.

Middelink, J.W. e.a. (2000a). *Systematische Natuurkunde N1 VWO 2*. Baarn: NijghVersluys.

Middelink, J.W. e.a. (2000b). *Systematische Natuurkunde N2 VWO 2*. Baarn: NijghVersluys.

Middelink, J.W. e.a. (2001). *Systematische Natuurkunde N1 VWO 3*. Baarn: NijghVersluys.

Miles, M.B., & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis*. London: Sage Publications.

Minsky, M.L. (1975). A framework for representing knowledge. In P.H.Winston (Ed.), *The psychology of computer vision* (pp. 211-277). New York: McGraw Hill.

Natuurkunde wiskunde conferentie (NWC) (1975). *Syllabus ter voorbereiding op de natuurkunde-wiskunde conferentie in Noordwijkerhout.* Noordwijk: NWC.

Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human problem solving*. New Jersey: Englewood Cliffs.

Newton, K.J., Star, J.R., & Lynch, K. (2010). Understanding the development of flexibility in struggling algebra students. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 282-305.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitations, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 396-426.

Olive, J., & Steffe, L.P. (2002). Schemes, schemas and director systems**:** An integration of Piagetian scheme theory with Skemp's model of intelligent learning. In D. Tall & M.O.J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics A tribute to Richard Skemp*. Flaxton, Australia: Post Pressed.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: University Press.

Porzio, D.T. (1997). *Examining effects of graphics calculator use on student's understanding of numerical, graphical, and symbolic representations of calculus concepts.* Paper presented at the American Educational Research Association, Chicago, IL. Binnengehaald 19 juli 2011 van http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED410112.pdf.

Powell, A., Francisco, J., & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 405-435.

Powell, A.B., & Maher, C.A. (2003). Heuristics of twelfth graders building isomorphisms. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 4, (pp. 23-30), Hawai.

Reichard, L.A., e.a. (2009). *Getal en Ruimte havo B deel 1*. Houten: EPN.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M.W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*, 1-16.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S., & Alibali, M.W. (2001.). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362.

Roorda G. (2006). Samenhang: Waar te beginnen? *Euclides, 81*, 346-349.

Roorda, G., Vos, P., & Goedhart M.J. (2007a). The concept of derivative in modelling and applications. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical* *modelling: Education, engineering and economics* (pp. 288-293). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M.J. (2007b). Derivatives in Applications: Describing Students' Understanding. In G. Kaiser, F. Garcia & B. Sriraman (Eds.), *Proceedings of the Working Group on Mathematical Modelling and Applications at the 5th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-5)*. Nicosia, Cyprus: University of Cyprus.

Roorda, G., Braber, N.S. den, & Vos, P. (2008). De remweg als functie van de snelheid; en wat is dan de afgeleide? *Euclides, 82*, 314-317.

Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M.J. (2009). Derivatives and applications; development of one students' understanding. *Proceedings of the working group on advanced mathematical thinking at the 6th conference on European research in mathematics education (CERME-6)*. Lyon, France.

Schneider, M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantane (On learning the rate of instantaneous change). *Educational Studies in Mathematics, 23*, 317-350.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan Publishing Company.

Schoenfeld, A.H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-487). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed ? In A.H. Schoenfeld (ed), *Assessing mathematical proficiency*. New York: Cambridge University Press.

Schorr, R.Y. (2003). Motion, speed, and other ideas that "should be put in books". *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 467-479.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S., & Mason, A. (2000). Calculus students and non-routine problems. In: E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld, & J.J. Kaput (Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 128-153). Providence, RI: American Mathematical Society.

Serhan, D. (2006). The effect of graphing calculators use on students' understanding of the derivative at a point. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. No. 08-05-2006, 30 p.

Serhan, D. (2009). Using concept maps to assess the effect of graphing calculators use on students' concept images of the derivative at a point. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. No. 08-10-2009, 21 p.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2002). Thinking in metaphors and metaphors for thinking. In D. Tall & M.O.J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics A tribute to Richard Skemp*, Flaxton, Australia: Post Pressed.

Singer, J.D., & Willet, J.B. (2003). *Applied Longitudinal Data Analysis. Modeling Change and Event Occurence*. Oxford: University Press.

Sinnema, S., & Streun, A. van (1984). Samen beginnen met de differentiaalrekening en de mechanica? *NVON-Faraday*, *53*, 17-19.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R.R.(1977). *Wiskundig denken*. Utrecht/Antwerpen: Het Spectrum.
Skemp, R.R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action: A Foundation for Theory and Practice in Education*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
Skemp, R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Smid, H.J. (2000). 'Dien onvergelijkelijken stap vooruit'. In: F.Goffree, M. van Hoorn, & B. Zwaneveld (Eds): *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Stake, R.E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks, CA : Sage Publications.
Stake, R.E. (2002). The Case Study Method in Social Inquiry. In R.Gomm, M. Hammersley & P. Foster, *Case Study Methods* (pp. 19-26). London: Sage Publications.
Star, J.R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565-579.
Stichting landelijke werkgroep economie onderwijs (1998), lesbrieven VWO, Eindhoven: Ergon bedrijven.
Stichting LWEO (2005). *Uitwerkingen 2005, Markten, deel 2.* Stichting LWEO.
Streun, A. van. (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs*. (Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen). Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
Streun, A. van. (1991). The relation between knowledge and heuristic methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*, 899-907.
Streun, A. van (1994). Wiskunde B in de nieuwe vwo-profielen. *Nieuwe Wiskrant, 13*(4), 17-24.
Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen*. (Oratie, Rijksuniversiteit Groningen). Rijksuniversiteit Groningen: Groningen.
Stuurgroep Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs (SPTFVO) (1996). *Tweede Fase in vraag en antwoord*. Den Haag.
Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: MPC.
Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1 (pp. 1-28). Rio de Janeiro, Brasil.
Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education conference*. Bergen, Norway: PME.
Tall, D. (2007a). Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education, *Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.
Tall, D. (2007b) Developing a theory of mathematical growth. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 39*, 145-154.
Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.
Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.
Thomas, M. (2002). Versatile learning in mathematics. In D. Tall & M.O.J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics: A tribute to Richard Skemp,* Flaxton, Australia: Post Pressed.

Thompson, P.W., & Thompson, A. (1994). Talking about Rates Conceptually. Part I: Teacher's Struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 279-303.

Thompson, P.W., & Thompson, A. (1996). Talking about Rates Conceptually. Part II: Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 2-24.

Thurston, W.P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*, 844-850.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*, 161-177

Tsamir, P., Raslan, S., & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to right-or-wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 240-251.

Tweede fase Adviespunt - ministerie Van Onderwijs Cultuur en Wetenschap. (2005). *Zeven jaar Tweede Fase, een balans*. Den Haag.

Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). *Advies examenprogramma havo/vwo wiskunde*. Enschede: SLO.

Uptegrove, E.B., & Maher, C.A. (2004). Students building isomorphisms. In M.J. Høines, & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education.,* Bergen, Norway: PME.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*, 335-359.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development ofsome simple geometrical concepts. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Berkeley CA: PME.

Vos, P., Braber, N.S. den, Roorda G., & Goedhart, M.J. (2010). Hoe begrijpen en gebruiken docenten van de schoolvakken natuurkunde, scheikunde en economie het wiskundige concept 'afgeleide'? *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 27*, 37-62.

Vos, P., & Roorda, G. (2007). Interpreting velocity and stopping distance; complementarity, context and mathematics. In G. Kaiser, F. Garcia, & B. Sriraman (Eds.), *Proceedings of the Working Group on Mathematical Modelling and Applications at the 5th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-5).* Nicosia, Cyprus: University of Cyprus.

Vredenduin, P.J.G.(1979). Terminologie in natuurkunde en wiskunde. *Euclides, 55*, 81-94.

Vuijk, R.A.J. e.a. (1998a). *Getal en Ruimte VWO 1*. Houten: EPN.

Vuijk, R.A.J. e.a. (1998b). *Getal en Ruimte VWO 2*. Houten: EPN.

Vuijk, R.A.J. e.a. (1999). *Getal en Ruimte VWO NG/NT 4*. Houten: EPN.

Vuijk, R.A.J. e.a. (2000). *Getal en Ruimte VWO NG/NT 5*. Houten: EPN.

Warner, L.B. (2005). *Behaviors that indicate mathematical flexible thought*. (Doctoral dissertation, The State University of New Jersey). The State University of New Jersey: New Brunswick.

Warner, L.B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior,* 27, 206-227.

Watson, A., Spirou, P., & Tall, D. (2003). The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1*, 73-97.

Weitendorf, J. (2007). *Realitätsbezüge im Analysisunterricht. Unterrichtliche Vorschläge und ihre Evaluation*. (Doctoral dissertation, Universität Hamburg). Berlin: Verlag Franzbecker.

Wilhelm, J.A., & Confrey J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*, 887-904.

Wright, T. (2001). Karen in motion: the role of physical enactment in developing an understanding of distance, time and speed. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 145-162.

Yin, R.K. (2003). *Case study research: Design and methods (3rd edition).* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zandieh, M. (1997). *The evolution of students understanding of the concept of derivative*. (Doctoral dissertation, Oregon State University). Corvallis: Oregon State University.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld, & J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

Zandieh, M. & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 1-17.

Zegers, G.E., Boersma, K.Th., Genseberger, R.J., Jambroes-Willebrand, A.G., Kooij, H. van der, Mooldijk, A.H., Wijers, M., & Eijkelhof, H.M.C. (2003). *Een basis voor SONaTe. Voorbeelden van inhoudelijke samenhang tussen de natuurwetenschappelijke vakken en wiskunde in de tweede fase havo/vwo*. Delft: Stichting Axis.

Samenvatting

Inleiding

Leraren en onderzoekers hebben de ervaring dat leerlingen in het voortgezet onderwijs de bij wiskunde verworven kennis en vaardigheden moeilijk toepassen bij andere schoolvakken als natuurkunde en economie. Dit zogenoemde 'transferprobleem' wordt onder andere genoemd bij de differentiaalrekening, een onderwerp dat wordt behandeld bij wiskunde in de bovenbouw van havo en vwo en gebruikt bij de vakken natuurkunde en economie. Bij economie wordt bijvoorbeeld de productie waarbij maximale winst optreedt berekend door de afgeleide van de totale kosten gelijk te stellen aan de afgeleide van de totale opbrengsten. Bij natuurkunde wordt de snelheid van een bewegend voorwerp berekend met natuurkundeformules maar ook met de raaklijnmethode, een grafische procedure om de momentane snelheid te benaderen door middel van het trekken van een raaklijn en het aflezen van de richtingscoëfficiënt van deze lijn.
Mijn onderzoek wil een bijdrage leveren aan de kennis van de manier waarop leerlingen hun kennis en vaardigheden met betrekking tot de differentiaalrekening ontwikkelen en hoe zij onderwerpen uit verschillende schoolvakken aan elkaar relateren. Deze kennis en vaardigheden worden in dit proefschrift aangeduid met de term 'wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide'. Het doel van dit onderzoek is door bestudering van de huidige situatie aanwijzingen te vinden waarmee de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide bij leerlingen ontwikkeld kan worden. De hoofdvraag is: *Hoe is in de loop van vwo 4, 5 en 6 de ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide?*

Theoretische achtergrond

Het concept afgeleide kan op veel manieren gebruikt worden om veranderingen in processen aan te geven. In dit proefschrift is het concept afgeleide geoperationaliseerd als een geheel van aan elkaar gerelateerde representaties, procedures en aspecten.

- *Representaties* zijn grafische, numerieke en symbolische weergaves. Leerlingen kunnen een raaklijn construeren aan een grafiek of over de grafiek spreken (grafische representatie), verschillen in tabellen berekenen of over toenames spreken (numerieke representatie) en een functie differentiëren of over formules spreken (symbolische representatie).
- *Procedures* zijn methoden om een bepaald type problemen op te lossen. Een momentane verandering wordt bijvoorbeeld door leerlingen berekend met procedures als de raaklijnmethode, symbolisch differentiëren of een

natuurkundeformule. Het geheel aan procedures dat een leerling gebruikt wordt aangeduid met het *repertoire* van een leerling.

- *Aspecten* zijn woorden die worden gebruikt om het concept afgeleide te interpreteren. In dit onderzoek gaat het om woorden zoals 'steilheid', 'richtingscoëfficiënt', 'toename' of 'snelheid'.

Bovenstaande operationalisering van het concept afgeleide berust op een door Kilpatrick, Swafford en Findell (2001) beschreven model waarin wordt verondersteld dat wiskundige bekwaamheid is opgebouwd uit vijf componenten, namelijk *conceptual understanding* (conceptueel begrijpen), *procedural fluency* (procedureel vloeiend werken), *strategic competence* (strategisch competent zijn), *adaptive reasoning* (adaptief redeneren) en *productive disposition* (een productieve houding hebben).
De wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide zal vooral zichtbaar worden in de eerste twee componenten, namelijk 'conceptueel begrijpen' en 'procedureel vloeiend werken'. Op basis van de beschrijving van Kilpatrick e.a. van deze twee componenten is bij het werken aan opdrachten gelet op de breedte en de samenhang van het repertoire van leerlingen op hun gebruik van representaties en op het noemen van aspecten van het concept afgeleide.

Onderzoeksopzet
In het onderzoek wordt de ontwikkeling beschreven van tien leerlingen van twee scholen. De leerlingen zijn gevolgd vanaf vwo 4 tot en met vwo 6. Ze volgden allen een natuurprofiel met daarin de vakken wiskunde-B1 en natuurkunde. Vier van de tien hadden als keuzevak economie.
In de loop van vwo 4, 5 en 6 zijn met tussenpozen van een half jaar vier opdracht-gebaseerde interviews afgenomen. De opdrachten en de methode van interviewen zijn zo gekozen dat ik diepgaande informatie verkreeg over het repertoire van de leerlingen en gebruik van representaties en aspecten van het concept afgeleide. In alle opdrachten zijn situaties beschreven waarbij de grootheden voor leerlingen een betekenis hebben, zoals afstand, kosten, benzineverbruik of remweg. Een deel van de opdrachten is gerelateerd aan natuurkundige of economische situaties. Leerlingen wisten niet dat alle opdrachten gerelateerd waren aan het concept afgeleide. Leerlingen werkten 'hardop denkend' aan de opdrachten. Alle interviews werden woordelijk uitgeschreven en geanalyseerd.
De interviewdata leverden een gedetailleerd beeld op van de door leerlingen gebruikte representaties, procedures en aspecten en daarmee van de ontwikkeling van hun wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide in de bovenbouw van het vwo.
Om de leerlingen, de docenten en de inhoud van de gevolgde lessen in de schoolvakken wiskunde, economie en natuurkunde te karakteriseren zijn

aanvullende gegevens verzameld, bijvoorbeeld uit leerboeken, studiewijzers en aantekeningen van leerlingen en zijn docenten en leerlingen geïnterviewd.

Resultaten

In de loop van vwo 4, 5, en 6 is bij de leerlingen een duidelijke ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide waar te nemen. Leerlingen kiezen in de loop van de interviews steeds vaker adequate procedures, dat wil zeggen procedures die tot een correct antwoord van de opdrachten kunnen leiden. Leerlingen gaan gemiddeld genomen over een breder en meer samenhangend repertoire beschikken en tegelijkertijd noemen ze meer verschillende aspecten van het concept afgeleide en relateren deze aan elkaar.

Na de introductie van de differentiaalrekening in vwo 4 gebruiken leerlingen vooral grafische procedures en aspecten. Vervolgens worden naast de grafische ook symbolische procedures gebruikt en deze worden steeds meer aan elkaar gerelateerd. Dit geldt met name voor de raaklijnmethode en symbolisch differentiëren. Enkele leerlingen breiden hun repertoire uit door meerdere procedures te noemen zoals een rekenmachine-optie en het gebruik van de grafiek van de afgeleide functie. Numerieke procedures worden niet veel gebruikt en het gebruik ervan neemt ook af tijdens de onderzoeksperiode. Uiteindelijk krijgen de meeste leerlingen een voorkeur voor symbolische procedures en worden niet-symbolische procedures door enkele leerlingen niet meer als alternatief gebruikt omdat ze deze procedures onnauwkeurig vinden.

Bepaalde procedures die bij verschillende schoolvakken worden behandeld relateren leerlingen op den duur aan elkaar. Dit geldt vooral voor het gebruik van een raaklijn om een momentane snelheid te berekenen en in mindere mate voor het berekenen van een differentiequotiënt om een gemiddelde snelheid te vinden. Het gebruik van formules bij natuurkunde en economie wordt door de meeste leerlingen niet gerelateerd aan procedures die bij wiskunde behandeld zijn.

Vergelijking van de analyses van de individuele leerlingen laat zien dat bovengenoemde ontwikkeling een gemiddelde is. Er zijn grote onderlinge verschillen in de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van de leerlingen, zoals in de voorkeur voor bepaalde procedures, in de periode waarin de grootste ontwikkeling plaatsvindt, in het moment waarop in de les geïntroduceerde procedures worden gebruikt, in de uiteindelijke breedte en samenhang van het repertoire en in de voorkeur voor bepaalde aspecten.

Sommige verschillen zijn te verklaren door de onderwijscontext op de school, zoals de herkenning van overeenkomsten tussen opdrachten (dit doen leerlingen op school A eerder dan op school B) en het repertoire (dat op school A breder lijkt dan op school B). De toenemende nadruk op het symbolisch differentiëren door de leraar op school B leidt ertoe dat enkele leerlingen als resultaat de grafische en numerieke procedures niet meer gebruiken. Maar ook tussen leerlingen die bij elkaar in de klas hebben gezeten zijn grote verschillen geconstateerd.

Conclusies, discussie en aanbevelingen

De opbrengst van dit onderzoek is een gedetailleerde beschrijving van de werkwijze van leerlingen en geeft een dieper inzicht in het complexe proces van ontwikkeling van kennis en vaardigheden bij wiskunde en het gebruik daarvan bij andere schoolvakken. De longitudinale opzet maakt het mogelijk de persoonlijke ontwikkelingen in de loop van de tijd te volgen door de uitspraken en handelingen van leerlingen. De onderzoeksopzet heeft ook complicaties in zich zoals de vergelijkbaarheid van resultaten van verschillende interviews, de setting van een opdracht-gebaseerd interview die de gekozen procedures kan beïnvloeden en de herkenning van opdrachten die herhaald gebruikt zijn. Het gehanteerde model van wiskundige bekwaamheid van Kilpatrick e.a. bleek een goed hulpmiddel om deze ontwikkeling te beschrijven.

In de loop van vwo 4, 5 en 6 gaan leerlingen gemiddeld genomen over een breder en meer samenhangend repertoire beschikken en tegelijkertijd meer verschillende aspecten van het concept afgeleide noemen. Daarvoor is het in de les herhalen en uitbreiden van conceptuele en procedurele kennis van het concept afgeleide noodzakelijk want procedures en aspecten die in een bepaalde periode zijn geïntroduceerd zijn in het eerstvolgende interview nog geen samenhangend onderdeel van de wiskundige bekwaamheid van leerlingen. Herhaling en uitbreiding van de differentiaalrekening zijn dus belangrijk voor de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid. In de loop van vwo 4, 5 en 6 gaan de meeste leerlingen relaties leggen tussen verschillende procedures, met name de bij natuurkunde geïntroduceerde raaklijnmethode en het bij wiskunde geïntroduceerde differentiëren. Hoewel enkele leerlingen progressie vertonen, blijft de samenhang zwak tussen enerzijds formules die behandeld zijn bij natuurkunde en economie en anderzijds de bij wiskunde behandelde procedures.

Voor het leggen van relaties tussen situaties uit de verschillende schoolvakken vervullen de aspecten zoals ‘snelheid’, ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’, ‘delta y gedeeld door delta x’ en ‘toename per eenheid’ een brugfunctie. Het construeren van overeenkomsten tussen situaties uit verschillende schoolvakken gaat beter als leerlingen dergelijke aspecten goed aan elkaar relateren. Deze persoonlijke constructie van relaties tussen situaties – in dit proefschrift aangeduid met actor-georiënteerde transfer – kan een belangrijke rol spelen in de oplossing van het genoemde transferprobleem.

Omdat de onderwijscontext op scholen in Nederland veel overeenkomsten vertoont met de situatie op beide scholen van dit onderzoek, lijkt het waarschijnlijk dat de geconstateerde ontwikkeling in wiskundige bekwaamheid bij veel leerlingen in de natuurprofielen van het vwo volgens dezelfde patronen zal verlopen.

Het verdient aanbeveling al in de onderbouw grafische en numerieke representaties van gemiddelde verandering en momentane verandering te onderwijzen in verschillende situaties. Daarbij dienen ook voor leerlingen toegankelijke aspecten als ‘steilheid’, ‘helling’ of ‘toename per eenheid’ gebruikt te worden. Dergelijke aspecten blijken een brugfunctie te vervullen tussen verschillende situaties.
In de bovenbouw zouden na de introductie van de symbolische representatie ook opdrachten gebruikt moeten worden die een beroep doen op grafische en numerieke representaties. Het is daarbij belangrijk om de relatie tussen verschillende aspecten van het concept afgeleide in allerlei situaties te laten verwoorden. Dit versterkt het conceptueel begrijpen en flexibel gebruiken van procedures en aspecten. Daarbij kan gebruik van een term als ‘mate van verandering’ of ‘momentane verandering’ helpen om diverse situaties aan elkaar te relateren.
Leerlingen relateren procedures uit verschillende vakken sterker aan elkaar als ze deze bij verschillende schoolvakken hebben gebruikt en als notaties of grafieken bij de verschillende vakken op elkaar zijn afgestemd. Vaksecties van verwante schoolvakken kunnen meer wiskundige bekwaamheid verwachten als zij een gemeenschappelijk opbouw van concepten, procedures en notaties ontwerpen.

Summary

Title of the thesis: **Development of 'change'.** The development of students' mathematical proficiency with respect to the concept of derivative.

Introduction

An experience shared by teachers and researchers is that secondary school students have difficulty applying learnt mathematical knowledge and skills to other subjects, such as physics and economics. This so-called 'transfer problem' is observed in calculus, a topic taught in mathematics classes in grades 10, 11, and 12 and applied in the subjects economics and physics. An example in economics is where the profit-maximizing output can be found by equating the derivatives of costs and revenues. An example in physics is where the speed of a moving object can be calculated using physics formulas, but also with the tangent method, a procedure to calculate instantaneous speed by drawing a tangent to the graph and reading off the slope of the tangent.

My study aims to contribute to understanding the way in which students develop their knowledge and skills concerning the concept of derivative, and how they create relations between topics of different school subjects. In my study, this knowledge and these skills will be termed as 'mathematical proficiency with respect to derivatives'. My goal is to study the present situation in order to find clues on how to develop students' mathematical proficiency with respect to derivatives. My main research question is: *How does students' mathematical proficiency with respect to the concept of derivative develop in the course of grades 10, 11, and 12?*

Theoretical background

The concept of derivative can be used in many ways for describing change processes. In this thesis, the concept of derivative is operationalized as a whole of mutually related representations, procedures, and aspects. These are defined as follows:

- *Representations* are graphical, numerical, and symbolic descriptions. Students can construct a tangent in a graph or talk about the graph (graphical representation), calculate differences from a table or talk about increase (numerical representation), and differentiate a function or talk about formulas (symbolic representation).
- *Procedures* are methods for solving certain types of problems. For example, instantaneous rates of change can be calculated by procedures such as the tangent method, symbolic differentiation, or a physics formula. The entirety of those procedures used by students will be defined as the student's *repertoire*.
- *Aspects* are words used to give meaning to the concept of derivative. Such words are, for example, 'steepness', 'slope', 'increase', and 'velocity'.

This operationalization of the concept of derivative is based on a model described by Kilpatrick, Swafford and Findell (2001) in which it is assumed that mathematical proficiency has five strands: *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, *adaptive reasoning*, and *productive disposition*.
Students' mathematical proficiency with respect to the concept of derivative is especially visible in the first two strands, *conceptual understanding* and *procedural fluency*. Based on the description of these two strands, I analyzed the breadth and connectedness of the repertoire, the use of representations, and verbalized aspects of the concept of derivative.

Methodological design

This study describes the development of ten students at two schools. They were followed from grade 10 to grade 12. All ten students took a 'science profile' or track in which the natural sciences (physics and chemistry) and mathematics are emphasized. Four students also chose economics as an elective.
During the period from grade 10 to grade 12, four task-based interviews were conducted with half year intervals. The tasks and interviews were designed to provide in-depth information about students' repertoire, and their use of representations and aspects of the concept of derivative. In all tasks, situations were described in which the variables had a meaning in real life, such as distance, costs, fuel consumption or stopping distance. Each interview contained a task related to physics and a task related to economics. Students were unaware that all tasks were about derivatives. Students were asked to think aloud. All the interviews were transcribed verbatim and analyzed.
The interview data provided detailed information about the representations, procedures, and aspects used by students, therefore about the development of mathematical proficiency with respect to the concept of derivative.
To characterize students, teachers, and the taught content in lessons on mathematics, economics, and physics, additional data were collected from textbooks, study guides, students' notebooks, and interviews with teachers and students.

Results

In the course of grades 10, 11, and 12, a clear development in mathematical proficiency with respect to the concept of derivative is visible. In consecutive interviews, students more often choose adequate procedures, in other words, those procedures that could lead to a correct answer. Students acquire, on average, a broader and more connected repertoire, and at the same time are able to verbalize more aspects of the concept of derivative and relate these to each other.

After the introduction of calculus in grade 10, students especially use graphic procedures and aspects. Subsequently, in addition to graphic procedures, students also use symbolic procedures and increasingly relate these procedures to each other. This is especially true for the tangent method and symbolic differentiation. Some students expand their repertoire by mentioning or using additional procedures such as calculator options or use of the graph of the derivative function. Numerical procedures are infrequently used and the use of this kind of procedures decreases. In the end, most students prefer symbolic procedures. Some students no longer use non-symbolic procedures as an alternative, because they consider these as inaccurate.

In the course of the study, students are able to relate some of the procedures taught in different school subjects to each other. This is especially true for the use of the tangent method to calculate instantaneous speed and, to a lesser degree, for calculations of the difference quotient to find an average speed. However, most students did not connect physics and economics formulas with the procedures taught in mathematics classes.

A comparison of the analyses of individual students shows that the developments described above are an average. There were large differences in development among students, for example, in terms of preferences for certain procedures, the period in which the greatest development took place, the time lapse between an introduction of a procedure and its usage, the final breadth and connectedness of the repertoire, and the preference for certain aspects.

Some of the differences can be explained by the educational context, such as the recognition of similarities between tasks (students from School A recognize similarities at an earlier stage) and the repertoire (students from School A seem to have a broader repertoire compared to those from School B). An increasing emphasis on symbolic differentiation by the teacher at School B results in statements by students that they no longer want to use graphic or numerical procedures. But there are also large differences observed between students who were in the same classes during this study.

Conclusions, discussion, and recommendations

This study provides a detailed description of students' approaches and offers a deeper insight into the complex process of the development of mathematical knowledge and skills of students, and the application thereof to other subjects. The longitudinal design enables the monitoring of students' personal development by analyzing statements and acts over time. The research design also led to complications such as issues on the comparability of results from different interviews, the setting where the task-based interview was conducted which might have influenced the procedures chosen, and the recognition of tasks which were used repeatedly. The model of mathematical proficiency by Kilpatrick et al. (2001) turned out to be useful for describing students' development.

In the course of grades 10, 11, and 12, students on average acquire a broader and more connected repertoire, and at the same time use and relate more different aspects of the concept of derivative. Therefore, the repetition and extension of conceptual and procedural knowledge with respect to the concept of derivative is necessary. Procedures and aspects introduced in one period will not necessarily be part of the mathematical proficiency of students in a subsequent interview. Both repetition and extension of calculus are important for the development of mathematical proficiency. In the course of grades 10, 11, and 12, most students relate procedures taught in different school subjects more and more to each other. This is especially true for the tangent method which is introduced in physics and symbolic differentiation which is introduced in mathematics. However, most students do not relate physics and economics formulas to the procedures taught in mathematics lessons. Although some students show progress, relationships between those procedures remain weak.

Aspects such as ‘velocity’, ‘steepness’, ‘slope’, ‘delta y over delta x’ and ‘increase per unit’ act as a bridging function for creating relations between situations from different school subjects. Constructing similarities between situations from different school subjects improves when students are able to relate such aspects correctly. These personal constructions of relations between situations – in this thesis referred to as actor-oriented transfer – can play an important role in solving the transfer problem mentioned earlier.

Because the educational setting in many schools in the Netherlands closely resembles the situation at both schools where this study was conducted, it seems probable that the observed development of mathematical proficiency of many students in the ‘science profiles’ will follow similar patterns.

The conclusions of this study lead to recommendations for teaching the concept of derivative.

Already in grades 7, 8, and 9, it is advisable to start teaching graphic and numerical representations of average and instantaneous rates of change in various situations. At that point, aspects should also be mentioned which are accessible to students such as ‘steepness’, ‘increase’, and ‘change’.

In grades 10, 11, and 12, after introducing symbolic representations, tasks should be used which call for graphic and numerical representations. Here, it is important that students verbalize relations between different aspects of the concept of derivative in various situations. This will strengthen conceptual understanding and the flexible use of procedures and aspects. In Dutch mathematics classes words should be sought to replace the word ‘snelheid’ equivalent to the English word ‘rate of change’, which would serve to relate various situations to each other.

Students do relate procedures more strongly when the same procedures are used in different school subjects, and when notations and graphs used in different school subjects are kept in tune with each other. If teachers in physics, economics, and mathematics design a common curriculum for concepts, procedures and notations, they can expect students to be more mathematically proficient.

Bijlage A Interviews met wiskundedocenten

Startinterview: Vragen aan de wiskundedocent van vwo 4 bij de start van het onderzoek.

Informatie over de leerlingen
1. Indeling van alle leerlingen in de klas: Als je de klas moet indelen in drie groepen: zwakke leerling in wiskunde, gemiddelde of goede leerling: zou je de achttien leerlingen in een categorie willen indelen?

2. Karakteriseren geselecteerde leerlingen. Per leerling vragen:
- Wat is er zwak/gemiddeld/goed aan deze leerlingen?
- Hoe zou je de studiehouding van de drie leerlingen willen omschrijven?
- Wat is je beeld over de manier van leren van de drie leerlingen? Bijvoorbeeld memoriseren, inzicht, hoe pakken ze een lastige opgave aan?

Informatie over het gegeven onderwijs in klas vwo 4
Hoe is de keuze voor de methode tot stand gekomen?
Wie maakt de studiewijzers?
Wie maakt de keuzes voor opdrachten? Waarop is die gebaseerd?
Hoe is de samenwerking met andere secties?
Wordt onderwijs van wiskunde en andere vakken op elkaar afgestemd? Zo ja, in welke mate?

Afsluitend interview: Vragen na interview 4 aan de wiskundedocent van vwo 6

Onderdeel A: Opgaven maken
Ik ga je nu een drietal opgaven voorleggen. Ik wil graag dat je deze opgaven maakt en hierbij hardop-denken toepast. Dus zou je willen zeggen wat je denkt en doet en je werkwijze toelichten. Ik zal misschien af en toe een vraag stellen, maar inhoudelijk zal ik mij er verder niet mee bemoeien. Verderop in het interview kunnen we het er nog wel over hebben.
- *Watertanks-b*
- *Tikkerband*
- *Remweg*

Vervolgvragen bij de opgaven:
Welke procedures zal een vwo 4-, 5- of 6-leerling gebruiken?

Onderdeel B: Vragen over de leerlingen
1. Zou je de zes leerlingen uit het onderzoek kunnen indelen in één van de categorieën, zwak, gemiddeld of goed?
2. Waarin is een leerling ingedeeld als zwak/gemiddeld/goed?
3. Heb je een idee of de leerlingen uit het onderzoek bijvoorbeeld de opdracht *Watertanks-b* goed zullen beantwoorden? En *Remweg-b*?
4. Wat is je beeld over de manier van leren van de leerlingen. Bijvoorbeeld memoriseren, inzicht, hoe pakken ze een lastige opgave aan?
5. Hoe zou je de studiehouding van de drie leerlingen willen omschrijven?

Bijlage B Interview met leerlingen

Vragen tijdens semigestructureerde deel van de interviews met leerlingen

Interview 1 (april 2006)
Ik zal iets vertellen over de bedoeling van deze eerste sessie. Ik ga je een aantal opdrachten voorleggen, met de vraag om ze al hardop-denkend op te lossen. Ik zal je regelmatig vragen of je wilt vertellen waar je aan denkt. Ik heb ook een aantal vragen over zaken die met exacte vakken te maken hebben. Alle informatie die ik over je verzamel zal ik anoniem presenteren.

Algemene vragen (Contextdeel van het interview)
- waarom heb je voor een natuurprofiel gekozen?
- heb je altijd op deze school gezeten?
- wat vind je van de vakken in het profiel: na,sk,wi?
-wat zijn je cijfers voor deze vakken?
- welke leraren heb je voor deze vakken?

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
Watertanks, Tikkerband, Monopolie, Steen

Afsluiting (Contextdeel van het interview)
Wat vind je van de grafische rekenmachine? Gebruik je hem veel? Bij welke vakken? Waarvoor?

Interview 2 (november 2006)
Ik zal kort uitleggen wat vandaag de bedoeling is. Je begrijpt dat ik weer enkele opgave heb, die je mag maken. Ik vraag tijdens het uitwerken weer of je onder woorden kunt brengen wat je denkt, en soms ook of je bij een opdracht nog een andere oplossingsmethoden kent. Ook heb ik weer, net als de vorige keer enkele algemene vragen.
Om het werken aan de opdrachten te onderbreken werk je eerst enige tijd aan drie opdrachten. Dan heb ik weer enkele algemenere vragen over de exacte vakken. Daarna volgen weer enkele opdrachten. En tenslotte heb ik een paar afsluitende vragen en opmerkingen.

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.05-0.15 Kogel (10 min)
0.15-0.30 Watertanks (15 min)
0.30-0.40 Ballon (15 min)

Algemene vragen (Contextdeel van het interview)
Hoe is het de afgelopen periode gegaan met wiskunde, natuurkunde, scheikunde? Verandering in studiehouding?

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.45-1.00 Monopolie (15 min)
1.00-1.10 Remweg (10 min)
1.10-1.20 Benzine (10 min)

Afsluiting (Contextdeel van het interview)
Gebruik je de rekenmachine vaak? Welke opties gebruik je vooral? Zijn er veranderingen in gebruik ten opzichte van V4?

Interview 3 (mei 2007)
Introductie zie interview 2

Werken aan de opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.05-0.15 VT-diagram (15 min)
0.15-0.30 Watertanks (15 min)

Algemene vragen (Contextdeel van het interview)
Hoe is het de afgelopen periode gegaan met wiskunde, natuurkunde, scheikunde?
Waar is het over gegaan bij wiskunde, natuurkunde, scheikunde?
Is er een verandering in je studiehouding?

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.30-0.40 Tikkerband (15 min)
0.45-1.00 Benzine (10 min)
1.00-1.10 Kosten (10 min)

Afsluiting (Contextdeel van het interview)
Gebruik je de rekenmachine vaak? Welke opties gebruik je vooral? Zijn er veranderingen in gebruik ten opzichte van het vorige interview?

Interview 4 (november 2007)
Introductie zie interview 2

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.05-0.15 Watertanks (10 min)
0.15-0.25 Kogel (10 min)
0.25-0.35 Benzine (10 min)

Algemene vragen (Contextdeel van het interview)
Hoe is het de afgelopen periode gegaan met wiskunde, natuurkunde, scheikunde?
Waar is het over gegaan bij wiskunde, natuurkunde,scheikunde?
Is er een verandering in je studiehouding?
Gebruik je de rekenmachine vaak? Welke opties gebruik je vooral? Zijn er veranderingen in gebruik ten opzichte van het vorige interview?

Werken aan opdrachten (Opdracht-gebaseerd deel van het interview)
0.40-0.50 Remweg (10 min)
0.50-0.55 Monopolie (10 min)

Terugblikken op het interview (Contextdeel van het interview)
Per opdracht vragen naar gebruikte procedures (verschilt per leerling)
Uitleg over mogelijke procedures (berekenopdrachten) en interpretaties (redeneeropdrachten).

Bijlage C De opdrachten

Opdracht Watertanks
Zie pagina 59

Opdracht Kogel
Zie pagina 61

Opdracht Monopolie
Zie pagina 63

Opdracht Remweg
Zie pagina 64

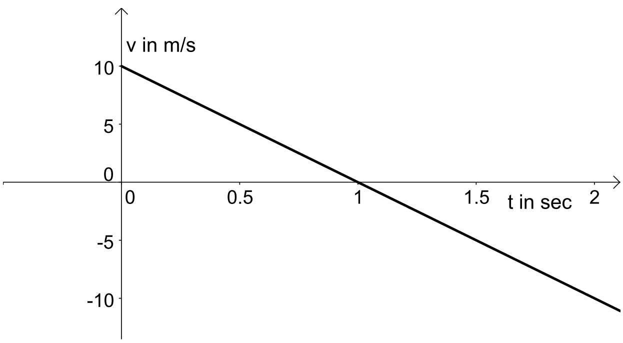
Opdracht Benzine
Zie pagina 65

Opdracht Kosten
Als een bedrijf de prijs van een product verhoogt, dan neemt de verkochte hoeveelheid meestal af. Voor een bepaald product is het verband tussen de prijs en de verkochte hoeveelheid $p = 100 - 2q$
Hierin is p de prijs is in euro per stuk, q is de afzet in miljoen stuks.

Voor de totale kosten in miljoenen euros geldt $TK = 0{,}05q^3 - 1{,}5q^2 + 20q + 500$
Ga er in deze opdracht vanuit dat alle geproduceerde artikelen ook worden verkocht.

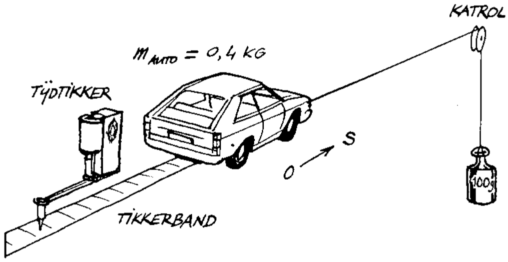
a. Wat is de betekenis van $\mathrm{TK}'(20)$?
b. Meestal zal een bedrijf naar maximale winst streven.
   Hoe kun je op basis van bovenstaande gegevens de maximale winst berekenen?

Opdracht Steen
Hieronder zie je een tijd-snelheid grafiek van een steen die omhoog wordt gegooid.



a. Schets een grafiek van de hoogte afhankelijk van de tijd.
b. De steen is vanaf de grond omhoog gegooid. Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting van de maximale hoogte die de steen heeft bereikt.

Opdracht Tikkerband

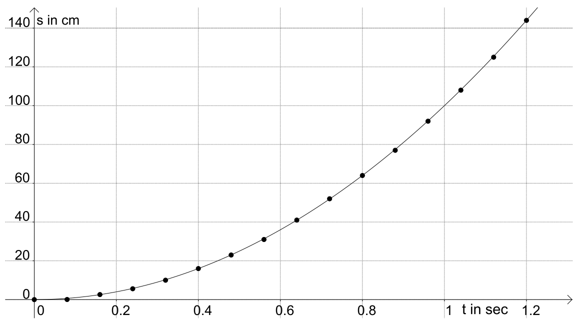


Figuur 1: Auto met tikkerband. De tijdtikker zet om de 0,08 seconde een stip op de tikkerband

Bij een natuurkundeproef wordt een autootje van 400 gram door een vallend gewicht van 100 gram voortgetrokken (zie figuur 1). Met behulp van een tijdtikker en een tikkerband wordt om de 0,08 seconde de afgelegde afstand *s* gemeten. In de tabel (figuur 2) staan de meetresultaten. Er is ook een grafiek gemaakt van de meetresultaten (figuur 3).

tijd *t* (sec)	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,80	0,88	0,96	1,04	1,12	1,20
s in cm	0	0,6	2,6	5,6	10	16	23	31	41	52	64	77	92	108	125	144

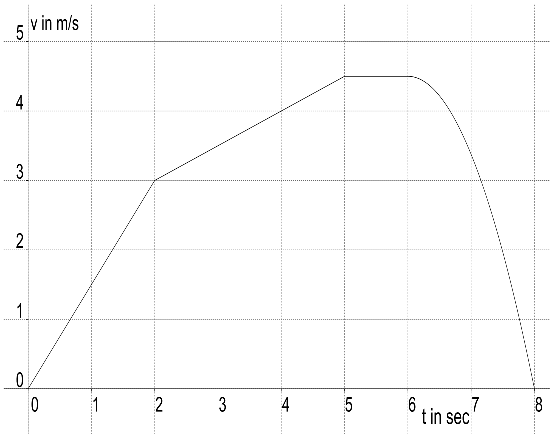
Figuur 2: tabel met meetresultaten



Figuur 3: grafiek van de meetresultaten.

a. Bereken de gemiddelde snelheid van het autootje in de eerste 1,20 seconden.
b. Bepaal de snelheid van het autootje op tijdstip t = 0,80 seconden.
c. Hoe groot is de versnelling van het autootje gedurende de eerste 1,20 seconden?

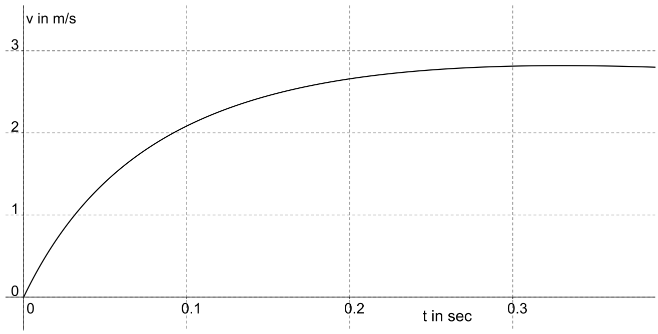
Opdracht V-T Grafiek
Een voorwerp verplaatst zich volgens de *v*-*t*-grafiek hieronder.



a. Schets een grafiek van de afgelegde weg.
b. Schets ook een grafiek van de versnelling.

Opdracht Ballon

Een kind laat een ballon ontsnappen die verticaal omhoog gaat.
Het *v*-*t* diagram van het eerste stuk van de beweging is hieronder weergegeven.



a. Beschrijf in woorden de beweging van de ballon in de eerste 0,3 seconden.
b. Iemand beweert dat de snelheid functie van de ballon tussen t = 0,15 s en t = 0,25s ongeveer voorgesteld kan worden door $v(t) = 2 + 3t$.
Hoe groot is de gemiddelde versnelling tussen t = 0,15 s en t = 0,25s ?
c. Schat de afstand die door de ballon tussen t = 0,15 s en t = 0,25s is afgelegd.

Bijlage D Overzicht van de gebruikte en genoemde procedures per leerling

Andy: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	8. rico. aflezen	●	1. interval	●	1. interval	●	1. interval	●
Watertanks-b	4. raaklijn 1. interval	○ ●	5. grm-optie 4. raaklijn 2. klein-interval	● ○ ◉	4. raaklijn 5. grm-optie 2. klein-interval	● ● ○	4. raaklijn 5. grm-optie 2. klein-interval	● ● ○
Watertanks-c	4. raaklijn 1. interval	● ●	4. raaklijn 5. grm-optie	● ●			--	
Tikkerband-a	3. helling koorde	●			3. helling koorde	●		
Tikkerband-b	4. raaklijn 2. klein-interval	● ●			4. raaklijn 5. grm-optie	○ ○		
Tikkerband-c	-	-			--			
Monopolie-a	1. interval	○	5. grm-optie	●			7.differentiëren 6. grafiek *f'* 5. grm-optie	● ● ●
Monopolie-b	--	-	--				6. grafiek *f'*	◉
Kogel			4. raaklijn 5. grm-optie	◉ ●			4. raaklijn 5. grm-optie 9. na-formule	○ ● ●
VT-a					--			
VT-b					--			
Kosten-b					7.differentiëren	○		

Bob: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	8. rico. aflezen	◉	8. rico. aflezen	●	8.rico. aflezen	●	8. rico. aflezen	●
Watertanks-b	4. raaklijn	●	4. raaklijn	●	7. differentiëren 4. raaklijn 2.klein-interval	◉ ○ ●	7. differentiëren 4. raaklijn 5. grm-optie	● ○ ○
Watertanks-c	--		4. raaklijn	●			7. differentiëren	●
Tikkerband-a	4. raaklijn	◉			3. helling koorde	●		
Tikkerband-b	--				4. raaklijn 7. differentiëren 1. interval	● ○ ●		
Tikkerband-c	--				4. raaklijn 1. interval	● ●		
Monopolie-a	--		3. helling koorde	◉			7. differentiëren 6. grafiek *f'*	● ●
Monopolie-b	--		7.differentiëren	○			7. differentiëren	○
Kogel			4. raaklijn 9. na-formule 7. differentiëren	● ◉ ◉			7. differentiëren 6. grafiek *f'* 4. raaklijn 1. interval 9. na-formule	● ● ○ ○ ●
VT-a			--		--			
VT-b			--		--			
Kosten-b			--		10. ec-formule	◉		

Casper: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	●	1. interval	●	1. interval	●	8. rico. aflezen	●
Watertanks-b	1. interval	●	4. raaklijn 2. klein-interval	⭘ ⭘	7. differentiëren 4. raaklijn	⭘ ●	7. differentiëren 4. raaklijn 2. klein-interval	● ○ ○
Watertanks-c	1. interval	○	--				7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ○
Tikkerband-a	9. na-formule	●			9. na-formule	⭘		
Tikkerband-b	--				4. raaklijn	●		
Tikkerband-c	9. na-formule	⭘			9. na-formule	⭘		
Monopolie-a	1. interval	⭘	1. interval 7. differentiëren 6. grafiek *f’*	⭘ ● ●			7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ●
Monopolie-b	--		7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ●			7. differentiëren 6. grafiek *f’* 10. ec-formule	● ● ●
Kogel			4. raaklijn 7. differentiëren 1. interval	● ● ○			7. differentiëren 4. raaklijn 9. na-formule	● ○ ⭘
VT-a					--			
VT-b					9. na-formule	●		
Kosten-b					7. differentiëren 10. ec-formule	○ ●		

Dorien: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	●	1. interval	●	7. differentiëren	●	8. rico. aflezen	●
Watertanks-b	1. interval	⭘	7. differentiëren 4. raaklijn	⭘ ●	7. differentiëren 4. raaklijn	● ○	4. raaklijn 7. differentiëren	⭘ ●
Watertanks-c			7. differentiëren 4. raaklijn	○ ○			7. differentiëren	○
Tikkerband-a	9. na-formule	●			9. na-formule	⭘		
Tikkerband-b					4. raaklijn	●		
Tikkerband-c					9. na-formule	⭘		
Monopolie-a			7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ●			7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ●
Monopolie-b	1. interval	●	7. differentiëren 6. grafiek *f’*	● ○			7. differentiëren	○
Kogel			4. raaklijn 7. differentiëren	● ●			9. na-formule 4. raaklijn 7. differentiëren	● ● ●
VT-a					--			
VT-b					9. na-formule 4. raaklijn	⭘ ⭘		
Kosten-b					7. differentiëren	○		

Elly: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a								
Watertanks-b	--		1. interval	●	1. interval	●	1. interval	●
Watertanks-c	--		--		1. interval	○	4. raaklijn	○
Tikkerband-a	--		--				--	
Tikkerband-b	9. na-formule	●			9. na-formule	●		
Tikkerband-c	--				--			
Monopolie-a	--				--			
Monopolie-b	10. ec-formule	○	3. helling koorde	○			--	
Kogel	--		9. na-formule	○			9. na-formule	●
VT-a								
VT-b					--			
Kosten-b					4. raaklijn	○		

Karin: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	⭘	1. interval	●	7. differentiëren	●	8. rico. aflezen	●
Watertanks-b	--		4. raaklijn	●	4. raaklijn 7. differentiëren	⭘ ●	4. raaklijn 7. differentiëren	● ⭘
Watertanks-c	--		7. differentiëren 4. raaklijn	○ ●			4. raaklijn 7. differentiëren	○ ⭘
Tikkerband-a	1. interval	●			9. na-formule	●		
Tikkerband-b	--				4. raaklijn 7. differentiëren	● ○		
Tikkerband-c	--				9. na-formule	⭘		
Monopolie-a	--		3. helling koorde	○			7. differentiëren	●
Monopolie-b	--		--				7. differentiëren	○
Kogel			4. raaklijn 7. differentiëren	⭘ ⭘			4. raaklijn 7. differentiëren 9. na-formule	○ ● ○
VT-a					--			
VT-b					--			
Kosten-b					--			

Maaike: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	--		--		1. interval	●	1. interval	⭘
Watertanks-b	--		2. klein-interval	⭘	--		2. klein-interval 7. differentiëren	● ⭘
Watertanks-c	--		--				7. differentiëren	●
Tikkerband-a	--				9. na-formule	●		
Tikkerband-b	--				--			
Tikkerband-c	--				9. na-formule	⭘		
Monopolie-a	--		7. differentiëren 6. grafiek f'	⭘ ⭘			7. differentiëren	●
Monopolie-b	--		7. differentiëren	⭘			7. differentiëren	●
Kogel			9. na-formule 2. klein-interval	⭘ ⭘			7. differentiëren 2. klein-interval 3. helling koorde 9. na-formule	● ○ ○ ○
VT-a					--			
VT-b					4. raaklijn	○		
Kosten-b					7. differentiëren	⭘		

Nico: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	●	--		1. interval	⭘	1. interval	●
Watertanks-b	--		7. differentiëren 4. raaklijn	⭘ ●	4. raaklijn 7. differentiëren	⭘ ⭘	7. differentiëren 4. raaklijn 5. optie grm	⭘ ○ ●
Watertanks-c	--		7. differentiëren	⭘			7. differentiëren 4. raaklijn	⭘ ○
Tikkerband-a	1. interval	●			3. helling koorde	●		
Tikkerband-b	3. helling koorde	○			9. na-formule 7. differentiëren 4. raaklijn 2. klein-interval	○ ○ ● ○		
Tikkerband-c	--				9. na-formule	○		
Monopolie-a	--		7. differentiëren	○			7. differentiëren 6. grafiek f'	● ●
Monopolie-b	1. interval	○	7. differentiëren	●			7. differentiëren	●
Kogel			9. na-formule 7. differentiëren 4. raaklijn 1. interval	○ ● ● ⭘			7. differentiëren 9. na-formule 3. helling koorde	⭘ ○ ○
VT-a					--			
VT-b					1. interval	●		
Kosten-b			--		--			

Otto: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	◉	--		1. interval	◉	7. differentiëren	●
Watertanks-b	--		7. differentiëren 4. raaklijn 5. grm-optie	◉ ○ ◉	7. differentiëren 4. raaklijn	● ●	7. differentiëren 4. raaklijn 5. grm-optie	◉ ● ●
Watertanks-c	--		7. differentiëren 4. raaklijn	◉ ○			4. raaklijn	○
Tikkerband-a	3. helling koorde	○			3. helling koorde	●		
Tikkerband-b	9. na-formule	○			4. raaklijn 9. na-formule	● ◉		
Tikkerband-c	--				--			
Monopolie-a	--		--				7. differentiëren	○
Monopolie-b	--		--				--	
Kogel			7. differentiëren 4. raaklijn 5. grm-optie	◉ ○ ◉			9. na-formule 7. differentiëren 9. na-formule	◉ ● ○
VT-a					--			
VT-b					9. na-formule	◉		
Kosten-b					--			

Piet: Gebruikte en genoemde procedures

	Interview 1		Interview 2		Interview 3		Interview 4	
Watertanks-a	1. interval	●	1. interval	●	7. differentiëren	●	7. differentiëren	●
Watertanks-b	1. interval	◉	4. raaklijn 7. differentiëren	○ ●	7. differentiëren	◉	7. differentiëren 4. raaklijn 5. optie grm	● ● ○
Watertanks-c	--		7. differentiëren	●			7. differentiëren	●
Tikkerband-a	1. interval	●			9. na-formule 1. interval	● ●		
Tikkerband-b	--				4. raaklijn	◉		
Tikkerband-c	--				9. na-formule	◉		
Monopolie-a	1. interval	◉	7. differentiëren	○			7. differentiëren 4. raaklijn	● ○
Monopolie-b	--		--				7. differentiëren	●
Kogel			9. na-formule	○			7. differentiëren 9. na-formule	● ●
VT-a					--			
VT-b					--			
Kosten-b					--			

Bijlage E Kernbegrippen

De lijst met kernbegrippen geeft overzicht over betekenis van gebruikte begrippen in dit proefschrift.

Accuraat uitgevoerde procedure	p.19	Een procedure die door een leerling zonder fouten wordt uitgevoerd.
Actorgeoriënteerde transfer	p.16	De persoonlijke constructie van relaties tussen verschillende activiteiten of situaties
Adequate procedure	p.18	Een procedure die passend is bij de opdracht en tot een oplossing van de opdracht kan leiden.
Afgeleideschema	p.31	Schema bestaande uit drie wiskundige representaties (symbolisch, grafisch en numeriek) elk opgebouwd uit vier lagen (functie, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt en afgeleide functie) met daaraan toegevoegd diverse situaties uit natuurkunde, economie, scheikunde of andere disciplines, waarin dezelfde vier lagen herkenbaar zijn (zie figuur 3.2).
Afstemming tussen schoolvakken	p.3	Het realiseren van afspraken tussen docenten over de manier waarop in hun onderwijs relaties tussen schoolvakken worden gelegd.
Aspecten van het concept afgeleide	p.45, 70	Woorden die gebruikt worden om het concept afgeleide te interpreteren, zoals ‘steilheid’, ‘richtingscoëfficiënt’, ‘helling’, ‘toename’, ‘verandering’, ‘delta y gedeeld door delta x’ en ‘snelheid’.
Berekenopdracht	p.56	Opdracht die met behulp van een procedure kan worden opgelost.
Breed repertoire	p.39	Het gebruiken van een grote variatie aan procedures bij één opdracht of in één test. In dit onderzoek wordt gesproken over een breed repertoire als leerlingen zes of meer (van de tien) procedures toepassen.
Concept afgeleide	p. 44, 45	Het geheel van aan elkaar gerelateerd representaties, aspecten en procedures die in verband staan met afgeleide functies.
Conceptueel begrijpen	pp.14 -18	Component van wiskundige bekwaamheid: het begrijpen van wiskundige concepten, bewerkingen en relaties.
Efficiënte procedure	p.19	Procedure die een leerling met een zekere snelheid uitvoert zonder na te hoeven denken over mogelijke vervolgstappen.
Klein-intervalmethode	p.39	Het berekenen van een gemiddelde toename op een klein interval.

Laag 2-, 3- of 4-procedure	p.39	Procedure waarmee respectievelijk een gemiddelde verandering (laag 2), momentane verandering (laag 3) of formule voor de verandering (laag 4) wordt berekend.
Procedureel vloeiend werken	pp.18-21	Component van wiskundige bekwaamheid: kennis van procedures, kennis wanneer en hoe procedures geschikt ingezet kunnen worden en vaardigheid in het flexibel, accuraat en efficiënt uitvoeren.
Procedure	p.18	Een algoritme of een methode om een bepaald type berekenopdrachten op te lossen.
Raaklijnmethode	p.39	Procedure om grafisch, door middel van het trekken van een raaklijn, de richtingscoëfficiënt in een punt te benaderen.
Redeneeropdracht	p.57	Opdracht die aanleiding geeft tot redeneringen maar niet tot berekeningen.
Rekenmachine-optie ‘dy/dx’	p.39	Het berekenen van de afgeleide waarde in een punt met de grafische rekenmachine-optie dy/dx.
Rekenmachine-optie ‘tangent’	p.39	Het laten tekenen en berekenen van een raaklijn door de grafische rekenmachine.
Repertoire	p.19	Het geheel aan procedures dat een leerling gebruikt
Representatiepercentage	P69	Percentage dat weergeeft in welke mate een leerling een representatie gebruikt ten opzichte van een vooraf vastgestelde maximumscore.
Representaties van het concept afgeleide	p.29	Symbolische, grafische of numerieke weergave van (onderdelen van) een concept afgeleide.
Samenhang tussen schoolvakken	p.3	De verbanden tussen leerstof uit verschillende schoolvakken die door leerlingen worden verwoord.
Samenhangend repertoire	p.41	Het beschikken over een repertoire waarbij de verschillende procedures aan elkaar gerelateerd worden.
Situatie	p.17, 30	In een opdracht gegeven beschrijving die voor leerlingen voorstelbaar is in de werkelijkheid, waarbij de grootheden een betekenis hebben zoals afstand, remweg, kosten of volume.
Symbolisch differentiëren	p.39	Het berekenen van de afgeleide van een functie met een rekenregel.
Wiskundige bekwaamheid zoals beschreven door Kilpatrick e.a (2001)	p.12	Model dat in vijf componenten beschrijft welke facetten onderdeel zijn van bekwaamheid in wiskunde.
Wiskundige bekwaamheid met betrekking tot het concept afgeleide	p.45	Het beschikken over een breed en samenhangend repertoire aan adequate procedures en het gebruik van representaties en aspecten van het concept afgeleide bij opdrachten in verschillende situaties

Curriculum Vitae

Gerrit Roorda werd geboren op 25 augustus 1967 te Groningen. Na het behalen van zijn VWO-diploma in 1986 rondde hij in 1991 aan de Rijksuniversiteit Groningen zijn doctoraal wiskunde af en in 1992 de universitaire lerarenopleiding voor het vak wiskunde. Hij gaf tot december 2000 wiskunde op achtereenvolgens het Gomarus College te Groningen en het Greijdanus College te Zwolle. In 1995 startte hij met zijn werk als freelance-auteur van de wiskundemethode Wiskundelijn (Uitgeverij Jacob Dijkstra) en later de methode Moderne Wiskunde (Noordhoff Uitgevers).
Vanaf 1999 werkt Gerrit als docent aan de lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen. Tot 2010 heeft hij ook als docent en studieadviseur van de Educatie en Communicatie master van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen gewerkt. Momenteel combineert hij zijn baan bij de Universitaire Lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen met een baan bij de Masteropleiding Leraar Wiskunde van de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden. Centraal in zijn werk staat het opleiden van (aanstaande) wiskundedocenten op het gebied van lesgeven, wiskunde-didactiek, didactisch onderzoek en wiskunde.
In 2003 startte Gerrit met promotieonderzoek gericht op samenhang tussen schoolvakken dat zich uiteindelijk toespitste op de ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide.
Gerrit is getrouwd met Gerlinde; zij hebben vier kinderen.

Dankwoord

Ontwikkeling van leerlingen, of breder van mensen is iets dat me bijzonder intrigeert. Op allerlei manieren, zoals leerlingen die wiskunde leren, studenten die leren onderzoeken, kinderen die leren volleyballen en ook mijn eigen ontwikkeling van wiskundedocent naar lerarenopleider en onderzoeker. Het onderzoeken van de ontwikkeling van leerlingen in een longitudinale studie was voor mij dan ook een prachtig onderwerp. Ik ben blij dat ik de mogelijkheid en gelegenheid heb gekregen voor dit onderzoek. Ik wil hieronder enkele mensen bedanken.

Anne, met jouw vraag begon dit onderzoeksavontuur. Je creëerde ruimte in mijn aanstelling om dit onderzoek op te starten. Ik kende je al lang als opleider, collega, medeauteur en leidinggevende en heb in alle verbanden waarin ik je ontmoette ervaren dat je een stimulerende, inspirerende man bent die het beste uit mensen weet te halen door ze positief te benaderen. Je bent al sinds mijn studie een groot voorbeeld voor mij.
Martin, toen je het stokje als hoogleraar bètadidactiek overnam kreeg je een hoofdrol in mijn begeleiding. Door je aantekeningen in de kantlijn, die me altijd weer veel werk bezorgden, is de kwaliteit van mijn onderzoek sterk verbeterd en ook mijn eigen bekwaamheid in het doen van onderzoek. Ik heb bijzonder veel van je geleerd. Ik waardeer je eerlijkheid, je scherpte, je vriendelijkheid en betrokkenheid. Ik hoop dat er na alle reorganisaties ruimte blijft voor verdergaande samenwerking rond de didactiek van het bèta-onderwijs.
Pauline, vanaf het moment dat jij mijn copromotor werd is er structuur gekomen in mijn onderzoek. Een combinatie van positieve stimulansen, strenge begeleiding, goede sturing en op een gedetailleerd niveau meedenken hebben me gesteund in het onderzoeksproces. Jij wees mij de weg in onderwijskundig en didactisch onderzoek, versterkte mijn onderzoek door flankerend onderzoek op te zetten en door internationale contacten te leggen.
Diverse leidinggevenden, Jan van Maanen, Henk Hanson (FWN), Jaap Buitink, Wim van de Grift (Universitaire lerarenopleiding) en Jan Borkent (NHL) hebben mij gedurende het onderzoek ruimte geboden, regelmatig belangstelling getoond en mij gestimuleerd om het onderzoek af te ronden.
Collega’s van de RuG en de NHL, ik waardeer jullie collegialiteit. Ik heb er plezier in om met jullie samen te werken. De vraag: “hoe is het met je promotieonderzoek?” hoeven jullie me niet meer te stellen en ik hoef hem gelukkig niet meer te beantwoorden. Het is af! En Martha, jij bent een fijne collega. Het is gezellig om met jou de werkkamer te delen. Ik ben blij dat we onze ervaringen in het promotieonderzoek steeds konden (en kunnen) delen.
Gerrit en Ina, jullie hebben als contactpersoon op school zeer positief meegewerkt. Via jullie kon ik contacten met leerlingen en collega’s leggen,

ruimtes op school regelen en informatie over de onderwijscontext verzamelen. Ook diverse collega's van jullie beide scholen hebben een bijdrage geleverd aan mijn onderzoek.
Berit, Herma, Ingmar, Joost, Joost, Kars, Lisanne, Marieke, Marloes, Marte, Maurits en Ype, doordat jullie in een kamertje met een video op je gericht, al hardop-denkend, puzzelend en redenerend aan mijn opdrachten wilden werken, ben ik veel te weten gekomen over jullie wiskundige bekwaamheid.
Bert Zwaneveld en Douwe Beijaard, jullie gaven nuttige adviezen in de fase van onderzoeksopzet. Michiel Doorman en Paul Drijvers, de dag waarop jullie hebben meegedacht over de manier van data-analyse, heb ik als bijzonder constructief en nuttig ervaren. Nelleke den Braber, je meedenken over mijn data heeft me verder geholpen en je flankerend onderzoek leverde mij veel informatie. Anita, wat een monnikenwerk, je hebt vele videobandjes voor mij getranscribeerd. Sieb Kemme, je redactionele werk heeft het verhaal van mijn proefschrift veel strakker gemaakt. Vader, u hebt 300 pagina's over een voor u niet erg interessant en bekend onderwerp op spelling gecontroleerd terwijl moeder zorgde dat we geconcentreerd aan het werk konden met koffie en koek bij de hand. Binne en Berend, fijn dat jullie me op de promotiedag als paranimfen terzijde willen staan.

Allen die in de afgelopen jaren op welke manier dan ook een bijdrage hebben geleverd aan mijn onderzoek bedank ik voor de positieve inbreng en inzet.

Lieve Gerlinde, je stimuleerde mij om door te gaan, vol te houden, af te ronden, maar ook om gewoon man en vader te zijn. Als ik jou niet had was ik misschien eerder klaar geweest met dit onderzoek, maar had ik minder geleefd, minder genoten, van wandelen, skeeleren, een wijntje 's avonds, contacten met familie en vrienden. Je hielp me m'n weg te vinden in de mix tussen werk (dat nooit af is) en ontspanning. Lieve Josien, Filip, Gerjan en Fenke, jullie zijn geweldige kinderen.

Tijdens mijn onderzoek heb ik regelmatig gelezen in het bijbelboek Prediker. Veel van zijn overwegingen zijn zo herkenbaar: "*lucht en leegte, alles is leegte* (1:3)", "*welk voordeel heeft de mens van alles wat hij met zijn gezwoeg tot stand brengt?* (3:1)", "*geniet van het leven met de vrouw die je bemint* (9:9)", "*er komt geen einde aan het aantal boeken dat geschreven wordt* (12:12)" maar uiteindelijk de centrale conclusie "*heb ontzag voor God* (12:13)". Ik geloof dat Hij altijd dichtbij is.